Retour sur l'exemple de la construction d'une centrale Electrique

Données initiales :

Critères Min/Max Type Paramètres Poids	Ingénieurs Min II q=10 1	Puissance Max III p=30 1	Coûts Min V q=50,p=500 1	Mainten. Min IV q=1, p=6 1	Villages Min I – 1	Sécurité Max VI s=5 1
a_1 : Italie	80	90	600	5.4	8	5
a_2 : Belgique	65	58	**200**	9.7	**1**	1
a_3 : Allemagne	83	60	400	7.2	4	7
a_4 : Suède	**40**	80	1000	7.5	7	**10**
a_5 : Autriche	52	72	600	**2.0**	3	8
a_6 : France	94	**96**	700	3.6	5	6

Fonction de préférence par critère :

La définition donnée concerne la fonction **H_j(x) avec x = |f_j(a) –f_j(b)|** (appelé ci-après **delta**).

H(x) mesure l'intensité de préférence entre **a** et **b** mais ne donne pas le sens de la préférence… (puisque **delta** est en valeur absolue). De fait, **H(x)** vaut :

$$H(x) = \begin{cases} P(a,b)\ si\ x \ \geq 0 \\ P(b,a) si\ x < 0 \end{cases}$$

Donc pour savoir à qui « profite » cette mesure, il faut tenir compte du signe du delta et du sens de l'optimisation (**minimiser** ou **maximiser**).

En d'autres termes :

- si on **maximise**, et que l'on compare **a** et **b** on veut un **delta le + grand possible** pour décider que **a** est préféré à **b** (et de **combien**) ;
- si on **minimise**, c'est l'inverse on veut un **delta négatif.**

Reformulons (ce qui veut dire, dire la même chose avec d'autres mots[1]) :

- Dire que **a est préféré à b** veut dire que **a est meilleur que b**… mais **meilleur est relatif** … si on **minimise**, **meilleur** veut dire **plus petit**, à l'inverse si on **maximise**, **meilleur** veut dire **plus grand**.
- Si on **maximise** : l'évaluation de **a** selon le **critère j** doit être **supérieure** à celle de **b**. Donc a – b >> 0
- Si on **minimise**, c'est l'inverse, on doit avoir **a – b << 0**.
- On peut dire aussi que **minimiser « x »** c'est **maximiser** « **–x », x étant la variable à optimiser**. Donc il faut maximiser **– delta (- { f_j(a) –f_j(b) }**

[1] Cette phrase, donc, reformule le terme « reformulons ».

Quel impact sur les critères généralisés (formule) ?

Toujours en gardant l'hypothèse que **a est préféré à b**

- Si on **maximise**, tout va bien on veut maximiser le delta, donc il suffit d'enlever la valeur absolue… **d_j = f_j(a) – f_j(b)**
- Si on **minimise**, c'est l'inverse… en définitive, on souhaiterait un **delta négatif**… => on veut que **–delta** soit **positif**…

Prenons l'exemple du quasi critère :

$$d_j(a,b) = \begin{cases} 0\, si\, d_j \leq 0 \\ 1\, si\, d_j > 0 \end{cases}$$

Cette définition considère le cas de la **maximisation**… si on **minimise** c'est l'inverse : plus **f_j(a)** est **grand** moins **a** est « **bon** » (et inversement) …
Considérons les évaluations que l'on produirait si on **minimisait** :

- Si **d_j** est **négatif** => **f_j(a) < f_j(b)** donc **a** est « **mieux** » que **b** => **P_j(a,b)** devrait valoir **1**
- Si **d_j** est **positif** => **f_j(a) > f_j(b)** donc **b** est « **mieux** » que **a** => **P_j(a,b)** devrait valoir **0**

Ce qui donne :

$$d_j(a,b) = \begin{cases} 0\ si\ d_j \geq 0 \\ 1\ si\ d_j < 0 \end{cases}$$

Cela revient pour la **minimisation** à multiplier **d_j** par **-1**, soit en d'autres termes la formule devient :

$$\boldsymbol{d_j(a,b) = \begin{cases} 0\ si\ -d_j \leq 0 \\ 1\ si\ -d_j > 0 \end{cases}}$$

DONC la formule de **P_j(a,b)** est (pratiquement) la même mais si on **maximise** on regarde **d_j** et si on **minimise** on regarde **-d_j**.
Ce qui est somme toute logique car

- si **d_j(a,b)** > 0 => | **d_j(a,b)** | = **d_j(a,b)**
- alors que si **d_j(a,b) < 0 =>** | **d_j(a,b)** |= -**d_j(a,b)**

La boucle est bouclée…

Concrètement, qu'est-ce que cela veut dire ?

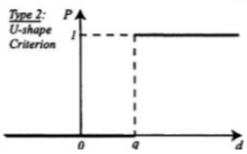
Lorsqu'on calcule les **P_j(a,b)**, selon qu'on maximise ou minimise, on regardera **d_j(a,b)** ou **- d_j(a,b)** .

Appliquons ce raisonnement au cas de la centrale électrique … (cf . cours)

Prenons l'exemple du calcul de $\pi(\, a_1, a_2)$ comme $\pi(\, x, y) = \sum_k^{i=1} P_j(x,y)$ cela implique de calculer tous les $P_j(a_1,a_2)$ et donc de regarder chaque critère généralisé choisi pour représenter l'attitude du décideur en terme de préférence sur le critère j.

CALCULS DES PREFERENCES …

Critère 1 (Ingénieurs) : Critère généralisé **II** & **Minimisation**

P_1 => 

$$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq q \\ 1 & d > q \end{cases}$$

Minimisation => on ne regarde plus la valeur **$f_1(a_1) – f_1(a_2)$** mais **$f_1(a_2) – f_1(a_1)$** càd **-$d_1(a_1, a_2)$**

La formule devient $P_j(a,b) = \begin{cases} 0\ si - d_j(a,b) \le q_j \Leftrightarrow -(f_j(a) - f_j(b)) \le q_j \Leftrightarrow f_j(b) - f_j(a) \le q_j \\ 1\ si - d_j(a,b) > q_j \Leftrightarrow -(f_j(a) - f_j(b)) > q_j \Leftrightarrow f_j(b) - f_j(a) > q_j \end{cases}$

La formule a considérer est $P_j(a,b) = \begin{cases} 0\ si(b) - f_j(a) \le q_j \\ 1\ si - f_j(b) - f_j(a) > q_j \end{cases}$

On a : **$f_1(a_1)$ = 80** , **$f_1(a_2)$ =65** & **q_1 =10 (et on minimise !)**.

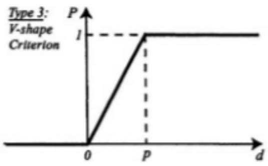
$P_1(a_1, a_2)$ => **$f_1(a_2)$- $f_1(a_1)$** = 65 – 80 = -15 < 10 => $\boxed{P_1(a_1, a_2)=0}$

Remarque : on pourrait se dire mais « on ne tient plus compte de la zone d'indifférence ? » … en fait, même si la différence était moindre par exemple 65-70 = -5 que l'on considère **|-5|** (<10 donc zone d'indifférence, donc résultat = 0) ou **-5** (négatif alors forcément <10 donc = 0) , le résultat est le même. **In fine**, le critère est : « est-on supérieur ou non à la zone d'indifférence) … et si on est moins bon .. la réponse est non ☺ .

Critère 2 (puissance) : Critère généralisé **III** & **Maximisation**

Max f_2 donc p forcément our P_2 on garde la définition standard : et on regarde la valeur **$f_2(a_1)$ – $f_2(a_2)$**

La formule reste valide …

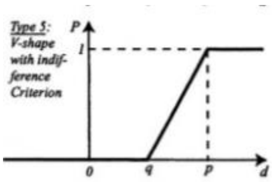


$$P(d) = \begin{cases} 0 & d \le 0 \\ \frac{d}{p} & 0 \le d \le p \\ 1 & d > p \end{cases}$$

On a : **$f_2(a_1)$ = 90** , **$f_2(a_2)$ = 58** & **p_2 =30**.

$P_2(a_1, a_2)$ => **$f_2(a_1)$- $f_2(a_2)$** = 90– 58 = +32 > 30 => $\boxed{P_2(a_1, a_2)=1}$

Critère 3 (Coûts) : Critère généralisé **V** & **Minimisation**



$$P(d) = \begin{cases} 0 & d \le q \\ \frac{d-q}{p-q} & q < d \le p \\ 1 & d > p \end{cases}$$

Minimisation => on ne regarde plus la valeur **$f_3(a_1)$ – $f_3(a_2)$** mais **$f_3(a_2)$ – $f_3(a_1)$** càd **$-d_3(a_1, a_2)$**

La formule devient

$$P_j(a,b) = \begin{cases} 0\ si - d_j(a,b) \le q_j \Leftrightarrow f_j(b) - f_j(a) \le q_j \\ \frac{-d_j(a,b) - q_j}{p_j - q_j}\ si\ q_j < -d_j(a,b) \le p_j \Leftrightarrow \frac{f_j(b) - f_j(a) - q_j}{p_j - q_j}\ si\ q_j < f_j(b) - f_j(a) \le p_j \\ 1\ si - d_j(a,b) > q_j \Leftrightarrow f_j(b) - f_j(a) > p_j \end{cases}$$

Donc en résumé :

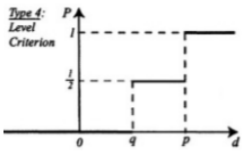
$$P_j(a,b) = \begin{cases} \mathbf{0}\ si\ f_j(b) - f_j(a) \le q_j \\ \dfrac{\boldsymbol{f_j(b) - f_j(a) - q_j}}{\boldsymbol{p_j - q_j}}\ si\ q_j < f_j(b) - f_j(a) \le p_j \\ \mathbf{1}\ si\ f_j(b) - f_j(a) > p_j \end{cases}$$

On ne regarde plus la valeur **$f_3(a_1) – f_3(a_2)$** mais **$f_3(a_2) – f_3(a_1)$**

On a : **$f_3(a_1)$ = 600** , **$f_3(a_2)$ =200** , **q_3 =50** & **p_3 =500**.

$P_3(a_1, a_2)$ => **$f_3(a_2)$- $f_3(a_1)$** = 200 – 600 = -400.< 50 => $\boxed{P_3(a_1, a_2)=0}$

Critère 4 (Maintenance) : Critère généralisé **IV** & **Minimisation**



$$P(d) = \begin{cases} 0 & d \le q \\ \frac{1}{2} & q < d \le p \\ 1 & d > p \end{cases}$$

Minimisation => on ne regarde plus la valeur **$f_4(a_1) – f_4(a_2)$** mais **$f_4(a_2) – f_4(a_1)$** càd **$-d_4(a_1, a_2)$**

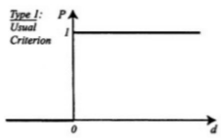
La formule devient

$$P_j(a,b) = \begin{cases} 0\ si\ f_j(b) - f_j(a) \le q_j \\ \frac{1}{2}\ si\ q_j < f_j(b) - f_j(a) \le p_j \\ 1\ si\ f_j(b) - f_j(a) > p_j \end{cases}$$

On a : **$f_4(a_1)$ = 5,4**, **$f_4(a_2)$ =9.7**, **q_4 =1**& **p_4 =6**.

$P_4(a_1, a_2)$ => **$f_4(a_2)$- $f_4(a_1)$** = 9.7– 5.4= 4,3 => 1 <4,3< 6 & => $\boxed{P_4(a_1, a_2)=1/2}$

Critère 5 (Villages) : Critère généralisé **I** & **Minimisation**



$$P(d) = \begin{cases} 0 & d \le 0 \\ 1 & d > 0 \end{cases}$$

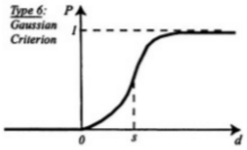
Minimisation => on ne regarde plus la valeur **$f_5(a_1) – f_5(a_2)$** mais **$f_5(a_2) – f_5(a_1)$** càd **$-d_5(a_1, a_2)$**

La formule devient $P_j(a,b) = \begin{cases} 0\ si\ f_j(b) - f_j(a) \le 0 \\ 1\ si\ f_j(b) - f_j(a) > 0 \end{cases}$

On a : **$f_5(a_1)$ = 8** , **$f_5(a_2)$ = 1**.

$P_5(a_1, a_2)$ => **$f_5(a_2)$- $f_5(a_1)$** = 1– 8= -7 < 0 => **$P_5(a_1, a_2)$=0**

Critère 6 (Sécurité) : Critère généralisé **VI** & **Maximisation**



$$P(d) = \begin{cases} 0 & d \le 0 \\ 1 - e^{-\frac{d^2}{2s^2}} & d > 0 \end{cases}$$

Maximisation => on regarde la valeur $\mathbf{f_6(a_1) - f_6(a_2)}$ càd $\mathbf{d_6(a_1, a_2)}$

On a : $\mathbf{f_6(a_1) = 5}$, $\mathbf{f_6(a_2) = 1}$ **&** $\mathbf{s = 5}$.

$\mathbf{P_6(a_1, a_2)}$ => $\mathbf{f_6(a_1) - f_6(a_2)}$ = 5– 1= 4 > 0 => $\boldsymbol{P_6(a_1, a_2) = 1 - e^{-\frac{4^2}{2\times 5^2}} = 1 - e^{-\frac{16}{50}}}$ **= 0,27385096**

Préférence Globale

$$\pi(a,b) = \sum_{j=1}^{k} P_j(a,b) \times w_j \quad avec \quad \sum_{j=1}^{k} w_j = 1$$

Donc **π ($\mathbf{a_1,a_2}$)** = (P_1 (a_1,a_2) + P_2 (a_1,a_2) + P_3(a_1,a_2) + P_4 (a_1,a_2) + P_5 (a_1,a_2) + P_6 (a_1,a_2)) / 6
= (0 +1 + 0 +1/2 + 0 + 0,27385096) / 6
= 2,778/ 6 = 0.296 ~ 0,30 .. càd le résultat indiqué dans le tableau

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	ϕ^+	ϕ^-	ϕ
a_1	–	.30	.25	.27	.10	.19	.22	.37	–.15
a_2	.46	–	.39	.33	.30	.50	.40	.38	+.02
a_3	.24	.18	–	.33	.06	.43	.25	.34	–.09
a_4	.40	.51	.31	–	.22	.21	.33	.35	–.02
a_5	.44	.52	.49	.38	–	.45	.45	.16	+.29
a_6	.29	.40	.25	.43	.13	–	.30	.35	–.05
ϕ^-	.37	.38	.34	.35	.16	.35			

Remarque : on peut vérifier les calculs des Phi+ et Phi-