



# Méthodes et Outils pour l'aide à la décision

**Introduction aux méthodes multicritères**

Erwan TRANVOUEZ - Maître de Conférences

[erwan.tranvouez@univ-amu.fr](mailto:erwan.tranvouez@univ-amu.fr)  
[erwan.tranvouez.free.fr](mailto:erwan.tranvouez.free.fr)



# Discussion autour de l'intérêt du multicritère

# Exemple de décision multicritères

3 / 40

- **Problème de décision :** Choix du stage de 5ème année
- **Critères:**
  - **Économiques** : indemnités de stage, avantage en nature (véhicule, tickets restaurants), coût du stage (déplacement, logement, ...)
  - **Carrière/prospective** : notoriété/réputation de l'entreprise, sujet de stage, perspectives d'embauche dans l'entreprise, adéquation avec profil de poste visé
  - **Contraintes « familiales »** : distance géographique
  - **Type d'entreprise** (PME, Grand Groupe...)
- **Simultanément !**
  - Alors que ces critères peuvent être opposés ...
  - **Well do your best ...**

# Exemple de décision multicritères

4 / 40

- **Problème de décision :** Choix du stage de 5ème année
- **Ces critères sont tous justifiés et (parfois/souvent ?) en opposition...**
  - L'importance relative de chaque critère peut varier d'une personne à une autre voire d'un moment à l'autre  
=> **comment choisir ?**
  - => **Solution simple** : ne retenir qu'un seul critère  
...souhaitable ?
  - => **Solution plus complexe** : méthode de décision multicritère

# Formulation du problème de décision multicritère

- Il s'agit d'optimiser la formule suivante :

$$\text{Opt } \{ f_1(x), f_2(x) \dots f_i(x), \dots f_n(x) \mid x \in A \} \quad (\text{E.2})$$

A étant l'ensemble des alternatives

avec  $f_i(x) \in \mathbb{R}$  une évaluation du critère i

- Se pose alors les questions de :
  - définir A
  - définir les k critères et leur fonction d'évaluation  $f_i(x)$
  - définir un processus d'optimisation
  - => En essayant de se rapprocher d'un problème d'optimisation mathématique

# Besoins méthodologiques spécifiques

## ➤ Illustration avec le paradoxe de Condorcet

- Achat d'un téléphone portable selon divers critères: le prix, le nombre de fonctions, la dangerosité, le poids, l'impact écologique...
- Comment choisir parmi les 3 modèles (ie alternatives) proposés
  - Compter le nombre de critères sur lesquels chaque modèle est optimum
  - Comparer 2 à 2 les alternatives pour identifier des préférences relatives
  - Attribuer des points sur chaque critère en fonction du classement du critère
  - ...

# Paradoxe de "Condorcet"

7 / 40

Critère	Choix Portable			Class <sup>t</sup> selon critères
	A	B	C	
Mémoire (Go)	32	<b>120</b>	64 Go	
Poids (g)	<b>80</b>	110	130	
Autonomie	24h	16h	<b>36h30</b>	
Prix (€)	<b>60</b>	200	300	
Radiation (DAS)	1,2	<b>0,92</b>	1,14	
Impact écologique	TFo	<b>Mod</b>	Fo	
Résistance	Fo	Mo	<b>TFo</b>	
Nb critères				

On compare les alternatives entre elles :  
 si le nb de critères validés de x est  
 supérieur a ceux de y alors x domine y.  
 On suppose les relations transitives...

A > B : \_\_\_ & B > A : \_\_\_ => \_\_\_ > \_\_\_  
 A > C : \_\_\_ & C > A : \_\_\_ => \_\_\_ > \_\_\_  
 B > C : \_\_\_ & C > B : \_\_\_ => \_\_\_ > \_\_\_  
 =>

# Paradoxe de "Condorcet" : Solution

8 / 40

Critère	Choix Portable			Class <sup>t</sup> selon critères
	A	B	C	
Mémoire (Go)	32	<b>120</b>	64 Go	B>C>A
Poids (g)	<b>80</b>	110	130	A>B>C
Autonomie	24h	16h	<b>36h30</b>	C>A>B
Prix (€)	<b>60</b>	200	300	A>B>C
Radiation (DAS)	1,2	<b>0,92</b>	1,14	B>C>A
Impact écologique	Tfo	<b>Mod</b>	Fo	B>C>A
Résistance	Fo	Mo	<b>Tfo</b>	C>A>B
Nb critères	2	<b>3</b>	2	<b>A 4, B 5, C 5</b>

On compare les alternatives entre elles :  
si le nb de critères validés de x est  
supérieur a ceux de y alors x domine y.  
On suppose les relations transitives...

A > B : 4 & B > A : 3 => **A > B**  
A > C : 2 & C > A : 5 => **C > A**  
B > C : 5 & C > B : 2 => **B > C**  
=> **A > B > C > A !!!**

# Paradoxe de Condorcet

9 / 40

- **Illustré à l'origine sur les conséquences des règles de votes (ex. vote à 2 tours)**
  - Souligne que le résultat n'est pas indépendant des règles appliquées et peut donc fortement varier
  - Alors même que l'hypothèse de rationalité est utilisée !
  - => La même remarque peut être faite sur les méthodes de décision !
- **Le choix d'une méthode n'est pas neutre**
  - Piège de la boîte noire
- **Le décideur ne doit pas dé/reléguer sa responsabilité au système d'aide à la décision**
- **Il est plus difficile d'obtenir LA solution optimale** : on recherche un compromis entre les critères mais lequel
- => **la méthode de décision doit aider le décideur à éclairer ses choix sans décider pour lui**

# Retour « à ce sujet »

10 / 40

- Toujours à propos des classements "des meilleur(e)s"...
- Quels problèmes posent ces classements en termes de méthode
- (et en quoi cette question vous intéresse)



Dés qu'elles sont proposées elles deviennent discutables

- Fiabilité des mesures des critères (subjectifs mais aussi objectifs)
- Fiabilité/Validité des méthodes de décision (cf. détails ci-après)
- ... mais se maintiennent faute d'existence d'une « vérité absolue » pouvant la remplacer ... ou de la dimension très technique du débat (cf. le concept de marge d'erreur ou de correction dans les sondages).
- Approche donc expérimentale se basant sur des bases théoriques mathématiques fortes.



# Méthodes multi critères

# Retour sur l'approche unicritère : propriétés

- I) problème bien posé: la notion d'optimum est claire.

Considérons l'objectif suivant :

$$\text{Max } \{ f(x) \mid x \in A \} \text{ avec } f(x) \in \mathbb{R}$$

On cherche la solution  $x^\circ$  dans  $A$  tel que  $\{ f(x^\circ) \geq f(x) \mid \forall x \in A \}$

Si  $x^\circ$  existe (et est unique) alors la solution s'impose d'elle-même

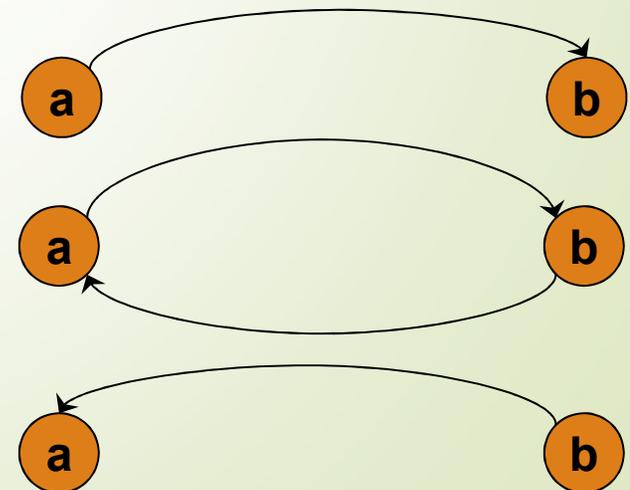
- II) Relation de dominance (I, P)

- Le critère  $f(x)$  permet de comparer les solutions :

- Soit  $a$  domine  $b$  :  $a P b$

- Soit  $a$  est indifférent de  $b$  :  $a I b$

$$\forall a, b \in A : \begin{cases} f(a) > f(b) \Leftrightarrow a P b \\ f(a) = f(b) \Leftrightarrow a I b \\ f(a) < f(b) \Leftrightarrow b P a \end{cases}$$



# Retour sur l'approche unicritère :

## propriétés (suite)

13 / 40

- III) Préordre complet
- Tout élément étant comparable 2 à 2 par la relation (I,P), il est donc possible de ranger les solutions
- IV) Transitivité des relations I & P

$$\begin{aligned} a P b \text{ et } b P c &\Rightarrow a P c \\ a I b \text{ et } b I c &\Rightarrow a I c \end{aligned}$$

Ex:

A	f(x)
a	15
b	30
c	50
d	30
Max f(x)	

a

b

d

c

# Retour sur l'approche unicritère :

## propriétés (suite)

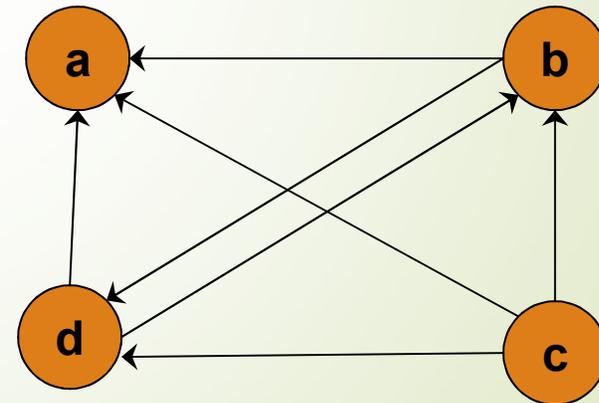
14 / 40

- III) Préordre complet
- Tout élément étant comparable 2 à 2 par la relation (I,P), il est donc possible de ranger les solutions
- IV) Transitivité des relations I & P

$$\begin{aligned} a P b \text{ et } b P c &\Rightarrow a P c \\ a I b \text{ et } b I c &\Rightarrow a I c \end{aligned}$$

Ex:

A	f(x)
a	15
b	30
c	50
d	30
Max f(x)	



$$\Rightarrow c (b \text{ ou } d) a$$

# Limites de l'approche unicritère

15 / 40

- **1 seul critère pas suffisant**

- Les contraintes financières, sociales, écologiques, légales, ... imposent de trouver un compromis.

- **Définition trop stricte des relations de dominance ou d'indifférence**

- **Ex:**

- Soient les alternatives suivantes - Salaire - :

- 5000 - 20 - 2 000 - 10 - 2 200 - 2 500 - 2 510 - 5010

- Que donne l'interclassement des alternatives

- 10 - 20 - 2 000 - 2 200 - 2 500 - 2 510 - 5000 - 5010

- => Il faut pouvoir tenir compte des effets d'échelle

# Propriétés de l'approche multicritère

## ➤ I) problème mal posé:

➤ Considérons l'objectif suivant :

$$\text{Opt } \{ f_1(x), f_2(x) \dots f_i(x), \dots f_n(x) \} \mid x \in A \text{ avec } f_i(x) \in \mathbb{R}$$

➤ On cherche la solution  $x^\circ$  dans  $A$  avec

$$f_i(x^\circ) \geq f_i(x) \mid \forall x \in A, \forall i = 1, 2, \dots, k$$

➤  $x^\circ$  peut ne pas exister  $\Rightarrow$  le problème est dit mathématiquement mal posé

➤  $\Rightarrow$  il faut trouver compromis

# Propriétés de l'approche multi-critère

## ➤ II) Relation de dominance

### ➤ Pas de préordre complet :

- on accepte que des choix ne soient pas comparable.
- On ajoute donc à la Préférence P et à l'Indifférence I : l'incomparabilité R :

$$\forall a, b \in A : \left\{ \begin{array}{l} a P b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_j(a) \geq f_j(b) \quad \forall j = 1, 2, \dots, k \\ \exists h \in A : f_h(a) > f_h(b) \end{array} \right. \\ a I b \Leftrightarrow f_j(a) = f_j(b) \quad \forall j = 1, 2, \dots, k \\ a R b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists h \in A : f_h(a) > f_h(b) \\ \exists h' \in A : f_{h'}(a) < f_{h'}(b) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

# Propriétés de l'approche multi-critère

## ➤ III) Pareto Optimalité

- Une solution  $a$  est appelée Pareto optimale ou efficace si aucune solution ne la domine.
- Soit  $E$  l'ensemble des solutions efficaces, le décideur devra choisir parmi  $e \in E$ . (élimination des solutions dominées)
- $E$  contient donc des solutions incomparables parmi lesquelles il faut faire un choix.

# Propriétés de l'approche multicritère

- IV) transitivité:
  - Ce n'est pas une propriété obligatoire (cf. paradoxe Condorcet).
  - Illustration avec choix téléphone
    - Un volontaire...

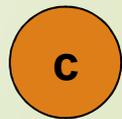
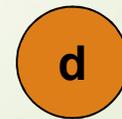
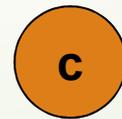
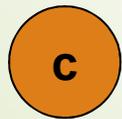
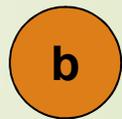
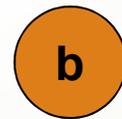
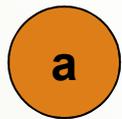
Critère	Choix Portable			
	A	B	C	D
Nb fct°s	8	15	13	15
Prix	30	200	300	250
Radiation	1,2	1.0	0,94	1.1

# Exemple

20 / 40



Nb fonctions



Prix

Nb fonctions & Prix

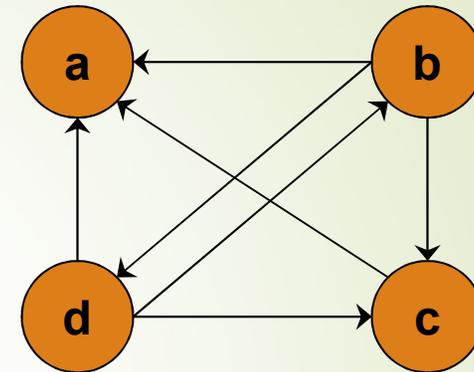
Tous critères

Critère	Choix Portable			
	A	B	C	D
Nb fct°s	8	15	13	15
Prix	30	200	300	250
Radiation	1,2	1.0	0,94	1.1

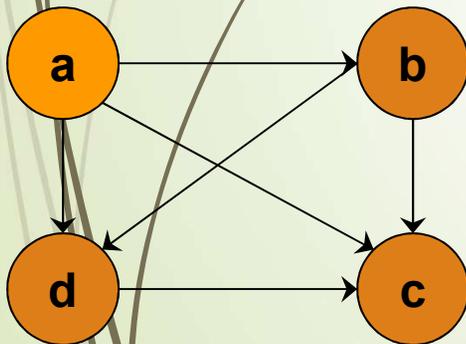
# Solution de l'exemple

21 / 40

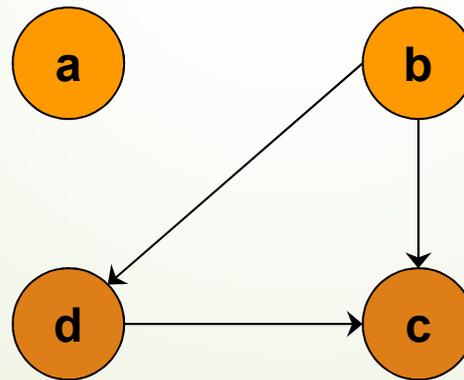
Critère	Choix Portable			
	A	B	C	D
Nb fct°s	8	15	13	15
Prix	30	200	300	250
Radiation	1,2	1.0	0,94	1.1



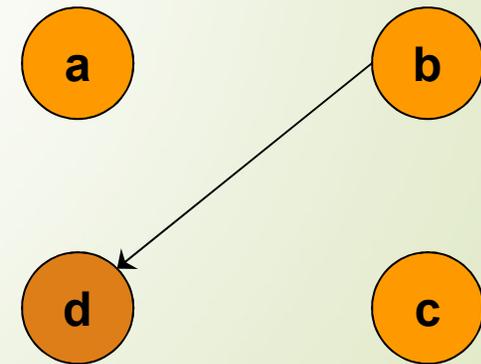
Nb fonctions



Prix



Nb fonctions & Prix



Tous critères

On voit bien que l'ajout de critères augmente le nombre de situations d'incomparabilité et donc rend plus difficile la prise de décision...

# Approches des problèmes multicritères

- **Comment trouver une solution à un problème à  $k$  critères ?**
- Passer à 1 critère
  - => méthodes d'agrégation
- Chercher à tâtons
  - => méthode interactive
- Relâcher la définition de dominance pour simplifier le problème
  - => méthode de surclassement

# Méthodes de type agrégation

23 / 40

## ➤ Il s'agit de reformuler :

$$\text{Opt } \{f_1(x), f_2(x) \dots f_i(x), \dots f_n(x) \mid x \in A\}$$

en

$$\text{Opt } \{ U(x) \mid x \in A \}$$

$$\text{avec } U(x) = U ( f_1(x), f_2(x) \dots, f (x), \dots , f_n(x) )$$

## ➤ Retombe sur un problème unicritère (préordre complet, problème bien posé, ...)

## ➤ Mais comment définir $U( )$ ?

### ➤ Ex. évaluation financière de tous les critères :

➤ Positif si avantage

➤ Négatif si mauvais (ex. pollution = coût de nettoyage)

➤ C'est une approche économique du problème ...

# Méthodes de type agrégation

24 / 40

- Forme générale des fonctions d'utilité :

$$U(x) = \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j(x)$$

- Avec
  - $\lambda_j$  exprimé en unité inverse de  $f_j(x)$
  - le problème du sens de  $f_j(x)$ ...
- **1<sup>ère</sup> approche** : optimisation mathématique de  $U(x)$
- **2<sup>ème</sup> approche** : recherche du point idéal

# Just one more thing...

25 / 40

- Forme générale des fonctions d'utilité :

$$U(x) = \sum_{j=1}^k \lambda_j U_j(f_j(x)) \quad \text{avec} \quad U_j(x) \in [0,1]$$

$U_j$  étant sans unité soit un score, un indice de performance...

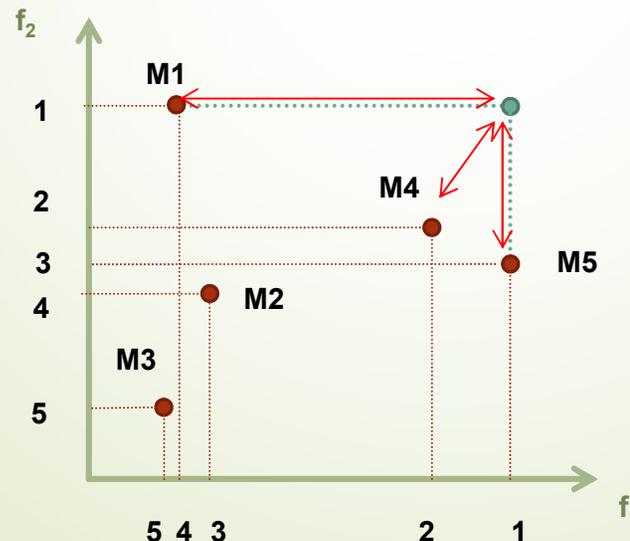
- Le problème de la comparaison entre fonctions utilitaires « individuelles » disparaît : leur particularité est résumée par le poids associé au critère.
- Masquage des différences** : seul l'écart moyen est considéré... ainsi les alternatives suivantes seront considérées comme équivalente (si poids égaux of course) :
  - $(100, -100) \sim (10, -10)$
  - $(100, 0) \sim (0, 100) \sim (50, 50) \Rightarrow$  conflits/arbitrages entre critères masqués...
- Exemple :
  - Dans un diplôme composé d'Unités d'Enseignements diverses, mesurant l'acquisition de compétences diverses et incomparable mais comparées par nécessité... **score = note**
  - $\Rightarrow$  *quid* du rôle du TOEIC dans la délivrance du diplôme d'ingénieur...

# Méthodes de type agrégation : point idéal

- Définition d'un optimum fictif  $M$  dit *point idéal*:

$$M = (M_1, M_2, \dots, M_k) \text{ avec } M \in \mathfrak{R}^k$$
$$\text{et } M_j = \max\{f_j(x), \forall x \in A\}, j = 1..k$$

- Si  $M \in A \Rightarrow$  l'optimum existe (rare)



# Méthodes de type agrégation : point idéal

- Sinon on cherche le point de  $A$  le plus proche de  $M \Rightarrow$  définition d'une distance

- $M = (M_1, M_2, \dots, M_k)$  avec  $M \in \mathbb{R}^k$

$$\text{Soit } F(x) = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\}$$
$$\min\{d(F, M), F \in A\}, j = 1..k$$

- Exemple de distance

$$\text{Soit } d_p(F, M) = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^k \pi_j (F_j - M_j)}$$

# Méthodes interactives

28 / 40

## ➤ Méthodes interactives :

➤ Cycle de séquence de calcul et de décision

## ➤ Principe

### ➤ *Itération 1:*

➤ Calcul d'une solution (efficace)  $x^0 = \{f_1(x^0), \dots, f_k(x^0)\}$

➤ Soumission de  $x^0$  au décideur :

➤ Il l'accepte => terminé

➤ Il veut améliorer  $x^0$  sur ses critères => si efficace impossible  
=> terminé

➤ Identifie un critère  $f_g(x)$  sur lequel il est prêt à faire une concession de  $\Delta g$  si ça lui permet de gagner sur les autres critères

# Méthodes interactives

29 / 40

► Principe

► Itération 2:

► Calcul d'une nouvelle solution sachant que :

$$\bar{x} \left\{ \begin{array}{l} f_j(x) \geq f_j(\bar{x}) \quad j = 1..k \text{ et } j \neq g \\ f_j(x) \geq f_j(\bar{x}) - \Delta_g \quad j = g \end{array} \right.$$

► Soumission de  $\bar{x}$  au décideur :

► Il l'accepte => **terminé**

► Il veut améliorer  $x^o$  sur ses critères => **impossible & terminé**

► Identifie un critère  $f_h(x)$  sur lequel il est prêt à faire une concession de  $\Delta_h$  si ça lui permet de gagner sur les autres critères

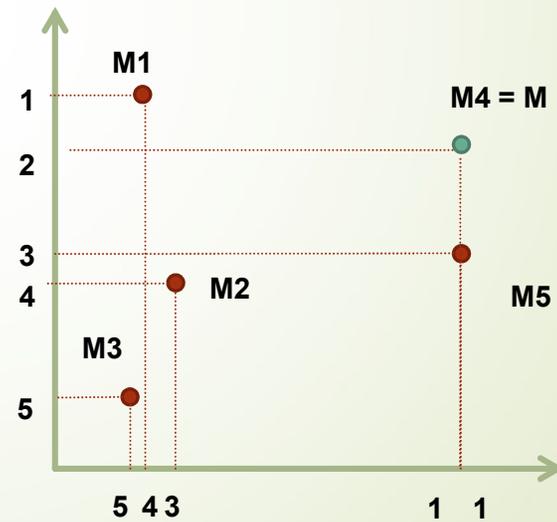
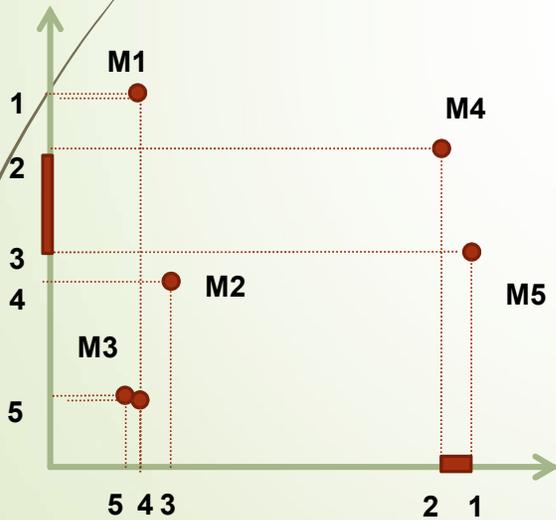
► Reprends l'itération

# Méthodes interactives

30 / 40

$$f_j(x) \geq f_j(\bar{x}) \quad j = 1..k \text{ et } j \neq g$$

$$f_j(x) \geq f_j(\bar{x}) - \Delta_g \quad j = g$$



# Méthode de type sur-classement

31 / 40

- Il s'agit de relâcher la relation de dominance (jusqu'ici basée sur l'unanimité)
- Sans aller jusqu'à une fonction d'utilité ( $\Rightarrow$  préordre complet)
- $\Rightarrow$  **enrichissement de la relation**
  - Par l'augmentation du nombre d'arc
  - Par l'ajout d'une relation valuée
  - Exemple de méthodes :
    - Electre (B. Roy et al.), Prométhée (Brans et al.)

# Retour « à ce sujet »

32 / 40

- Toujours à propos des classements "des meilleur(e)s"...
- Que constitue selon vous le rang dans un classement d'un point de vue décisionnel ?