Méthodes et Outils pour l'aide à la décision

Zoom sur une méthode multicritère particulière: la méthode Prométhée

Erwan TRANVOUEZ - Maître de Conférences

erwan.tranvouez@univ-amu.fr
erwan.tranvouez.free.fr

POLYTECH MARSEILLE
Aix Marseille Université

Bibliographie

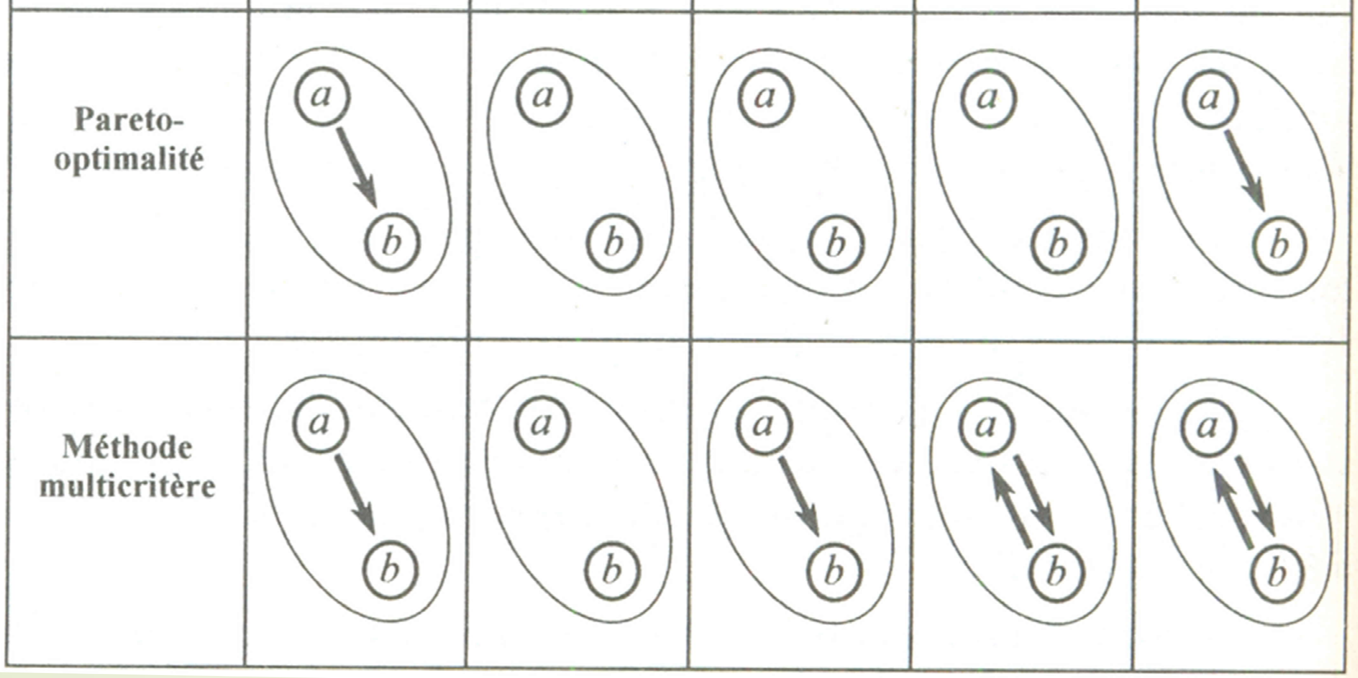
- Processus de décision : démarches, méthodes et outils. S. Bellut. Afnor 2002.
- Promethée – Gaia : une méthodologie d'aide à la décision en présence de critères multiples. J.-P. Brans et B. Mareschal. Ed. de l'univ. De Bruxelles. Ellipse.
- Decision Theory : A Brief Introduction, Sven Ove Hansson, Royal Institute of Technology (KTH), 2005.

Motivations : Etude détaillée d’une méthode multicritère

Qu’attendre d’une méthode multicritère ?

- Illustration au travers des cas suivants :

	Exemple I		Exemple II		Exemple III		Exemple IV		Exemple V	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
a	100	100	100	30	100	99	100	99	100	100
b	20	30	20	100	20	100	99	100	99	99



Source Brans & Mareschal

Qu'attendre d'une méthode multicritère ?

- **Prise en compte des écarts**
  - le différence de valeurs d'un critère
- **Élimination des effets d'échelles**
  - Unités ≠, différence relative,
- **Maintien de l'incomparabilité *(préordre partiel)***
  - Possible de ne pas pouvoir comparer 2 choix
- **Simplicité**
  - ie méthode compréhensive vs. boîte noire
- **Signification de l'information supplémentaire**
  - Tout ajout d'info doit être justifié et compréhensible (sinon contradiction avec objectif précédent)
- **Aspects conflictuels des critères**
  - Détection de ces conflits pour alerter le décideur
- **Interprétation des poids attribués aux critères**
  - le notamment leur impact sur la décision (variation de x% du poids sur la décision)

Donnée initial du problème

- *n* choix évalués selon *k* critères

	$f_1(.)$	…	$f_j(.)$	…	$f_k(.)$
a_1	$f_1(a_1)$	…	$f_j(a_1)$		$f_k(a_1)$
…	…	…	…	…	…
a_i	$f_1(a_i)$	…	$f_j(a_i)$	…	$f_k(a_i)$
	…	…	…	…	…
a^n	$f_1(a_n)$	…	$f_j(a_n)$	…	$f_k(a_n)$

- **Il faut trouver $\bar{a}$ tel que**
  - $\bar{a}$ optimise $\{f_j(.), j \in [1..k]\}$

Enrichissement de la structure de préférence

- **Preference Ranking Organisation METHod for Enrichment Evaluation.**
  - 1ère version 1982 => 1992
- **Problème de décision abordé :**
  - Choix : Prométhée I & II
  - Rangement : Prométhée II
- **Méthodes de type *surclassement* :**
  1. Enrichissement de la structure de préférence
  2. Enrichissement de la relation de dominance
  3. Aide à la décision

Enrichissement de la structure de préférence

- Rappel :

$$\forall\, a,b \in A \;:\; \begin{cases} f(a) > f(b) \;\Leftrightarrow\; a\ P\ b \\ f(a) = f(b) \;\Leftrightarrow\; a\ I\ b \end{cases}$$

- **Si on s'intéresse maintenant aux écarts :**
  - $d_j(a,b) = f_j(a) - f_j(b)$

- **On recherche une fonction qui permette de définir le degré de préférence de a sur b en fonction de la valeur de $d_j(a,b)$ (et pas seulement son signe).**

- **Soit $P_j(a,b)= P_j[d_j(a,b)]$ cette fonction tel que**
  - $0 \leq P_j(a,b) \leq 1$

Enrichissement de la structure de préférence

- **Si il faut maximiser fj(a), on dira que :**

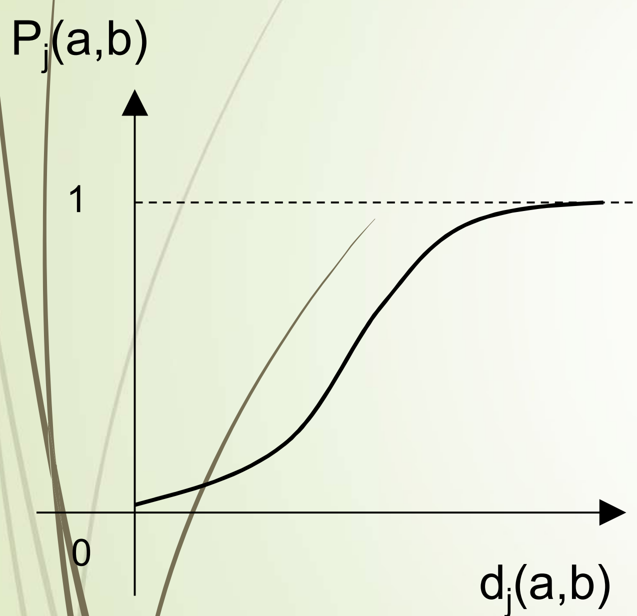
$$\begin{cases} P_j(a,b) = 0 \text{ si } dj(a,b) \leq 0 & \text{: pas de préférence} \\ P_j(a,b) \approx 0 \text{ si } dj(a,b) > 0 & \text{: préférence faible} \\ P_j(a,b) \approx 1 \text{ si } dj(a,b) >> 0 & \text{: préférence forte} \\ P_j(a,b) = 1 \text{ si } dj(a,b) >>> 1 & \text{: préférence stricte} \end{cases}$$

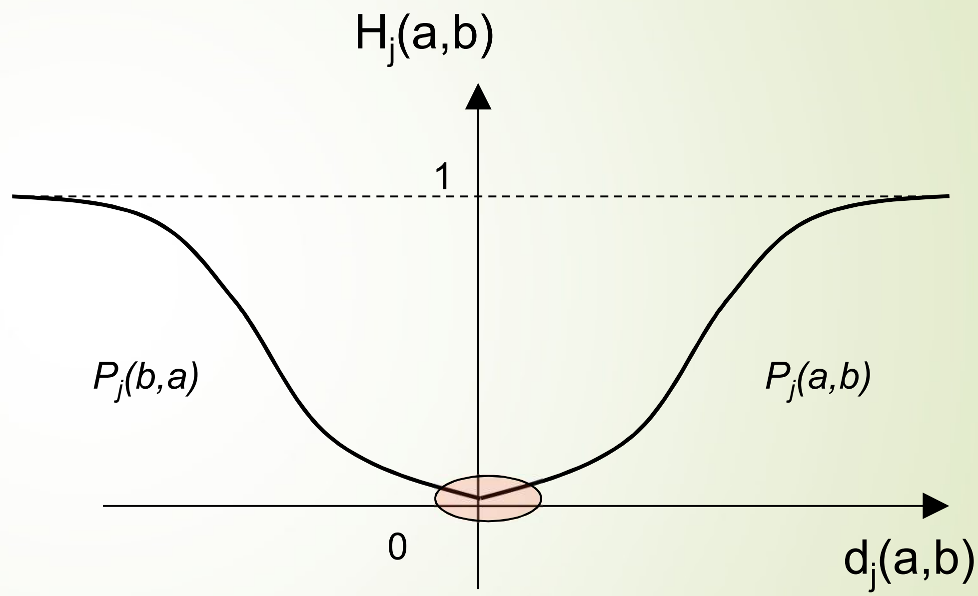
- **=> $P_j(a,b)$**
  - doit être non décroissant
  - $P_j(a,b) = 0$ pour $dj(a,b) = 0$

- **On peut faire de même sur la notion d'indifférence**
  - Car $P_j(a,b) = 0$ n'implique pas $P_j(b,a) = 0$!!

Enrichissement de la structure de préférence

- Exemple de courbe :



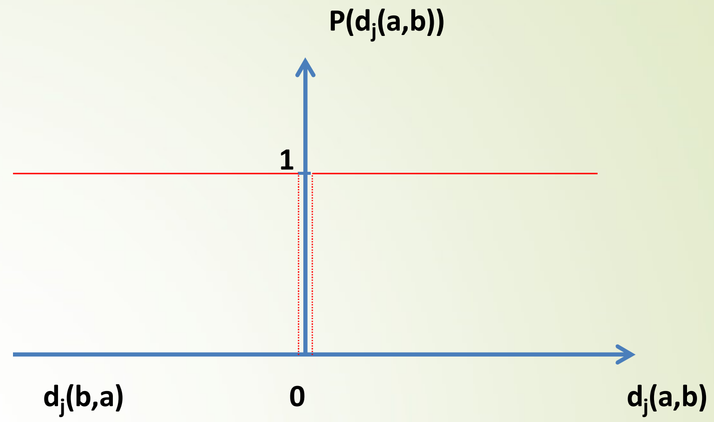


6 types de critères généralisés sont proposés « de base ».

Dénominations différentes (traduction oblige) dans le logiciel Visual Prométhée.
Cf. Fin du cours

Type I : critère usuel

- **Allure de la courbe**



- **Fonction de préférence :**

$$d_j(a,b) = \begin{cases} 0 \; si \; d_j \leq 0 \\ 1 \; si \; d_j > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$si \; f_j(a) = 100 \; et \; f_j(b) = 99$$

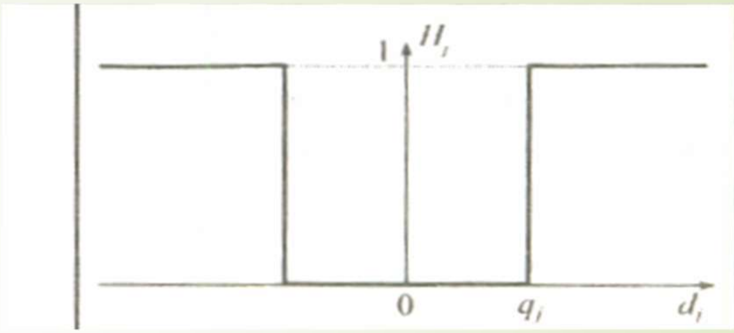
$$\Rightarrow \quad d_j(a,b) = 1 \; (delta = 1)$$

$$et \; d_j(b,a) = 0 \; (delta = -1)$$

- **Définition stricte de la préférence et de l'indifférence**
  - ie uniquement si $f_j(a)=f_j(b)$ ie $d_j(a,b)=0$
  - => Utiliser uniquement ce critère revient à la situation décrite précédemment (tr 4) : 6001 sera préféré strictement à 6000 (pas de relâchement de la relation de surclassement).

Type II : quasi-critère

- **Fonction de préférence :**

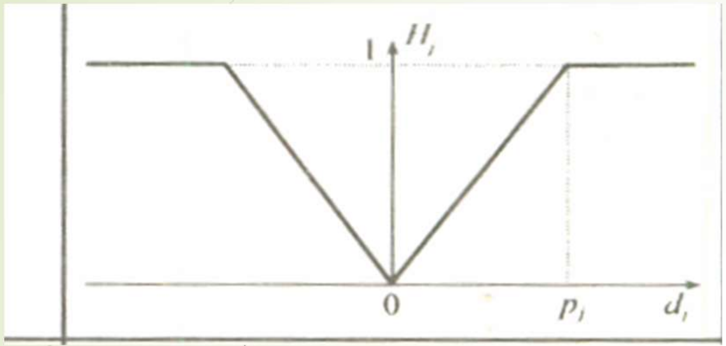


- **Définition d'un seuil d'indifférence q_j**
- **Au-delà on a une préférence stricte**

$$H_j(d_j) = \begin{cases} 0\, si\ |d_j| \leq q_j \\ 1\, si\ |d_j| > q_j \end{cases}$$

- **Exemple :**
  - soit 2 alternatives a & b, et leur évaluation via un critère 1 : f_1(a)= 100 et f_1(b)=80 avec seuil d'indifférence 10
  - => P_1(**a**,**b**) = P_1(f_1(a)-f_1(b)) = P_1(20)= 1
    => P_1(**b**,**a**) = P_1(f_1(b)-f_1(a)) = P_1(-20)= 0
  - On vérifie la non symétrie des fonctions de préférence

Type III : Critère à préférence linéaire

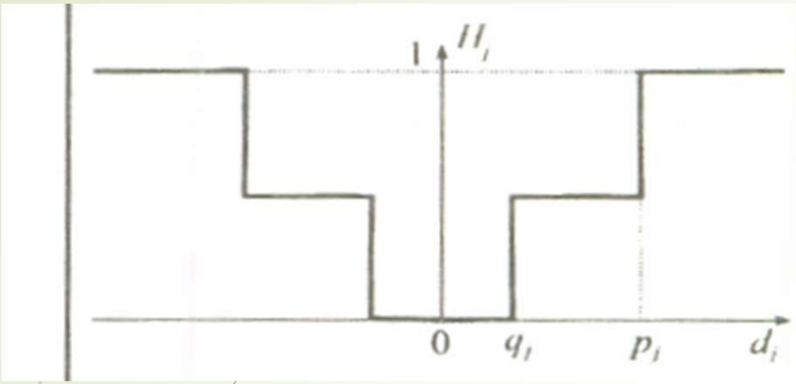


$$H_j(d_j) = \begin{cases} \dfrac{|d_j|}{p_j} & si \ |d_j| \le p_j \\ 1 & si \ |d_j| > p_j \end{cases}$$

❑ Fonction de préférence :

- de [o, $\mathbf{p_j}$] croissance linéaire
- puis de]pj, +∞[préférence stricte.
- p_j peut être déterminé en partant du haut et en s'arrêtant au moment où le décideur cesse d'avoir une préférence stricte.

Type IV : Critère à palier



$$H_j(d_j) = \begin{cases} 0 \;\; si \;\; |d_j| \leq q_j \\ \frac{1}{2} \;\; si \;\; q_j < |d_j| \leq p_j \\ 1 \;\; si \;\; |d_j| > p_j \end{cases}$$

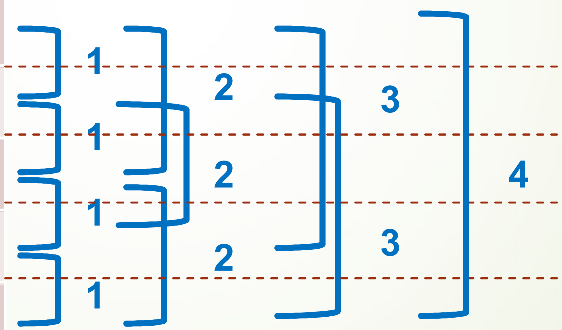
- **Fonction de préférence :**
  - a I b tant que $| f_j(a) - f_j(b) | < q_j$
  - a $P_{faiblement}$ b avec écart compris entre q_j et p_j
  - a $P_{strictement}$ si écart > seuil p_j.
- Permet de traiter les évaluations du type qualitatif :
  - (très mauvais, mauvais, moyen, bon, très bon) en associant des valeurs numérique (1 à 5)
  - => dans ce cas q_j=1,5 et p_j = 2,5.

IV Utilisation du critère Pallier pour un critère qualitatif : exemple

- **Exemple :** Valeur qualitative d'un niveau de satisfaction : Très Bon, Bon, Moyen, Médiocre; Faible
- **L'idée est qu'il faut raisonner en terme de comparaison par paire :** « combien » préfère t'on un niveau de satisfaction versus un autre…

Niveau de satisfaction	Echelle numérique
Très Bon	5
Bon	4
Moyen	3
Médiocre	2
Faible	1

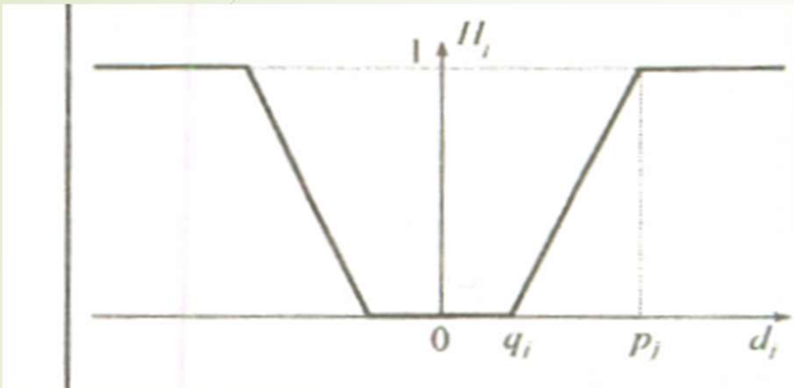
Valeur des écarts des comparaison par paires



En définissant un niveau d'indifférence, de préférence stricte, on peut caractériser la sensibilité du décideur.
Par exemple :
- Si différence entre 2 niveaux non Significative => q=1,5 et p = 2,5
- plus « classiquement » q = 0,5 et p = 1,5

- **Implique une échelle équirépartie** (écart de préférence entre 2 niveau de satisfaction constant)
- **Mais possible de jouer dans une certaine mesure en attribuant des écarts différents** (ex. mettre faible à 0, médiocre à 1) **et en définissant des seuils de préférence/indifférence adaptés…**

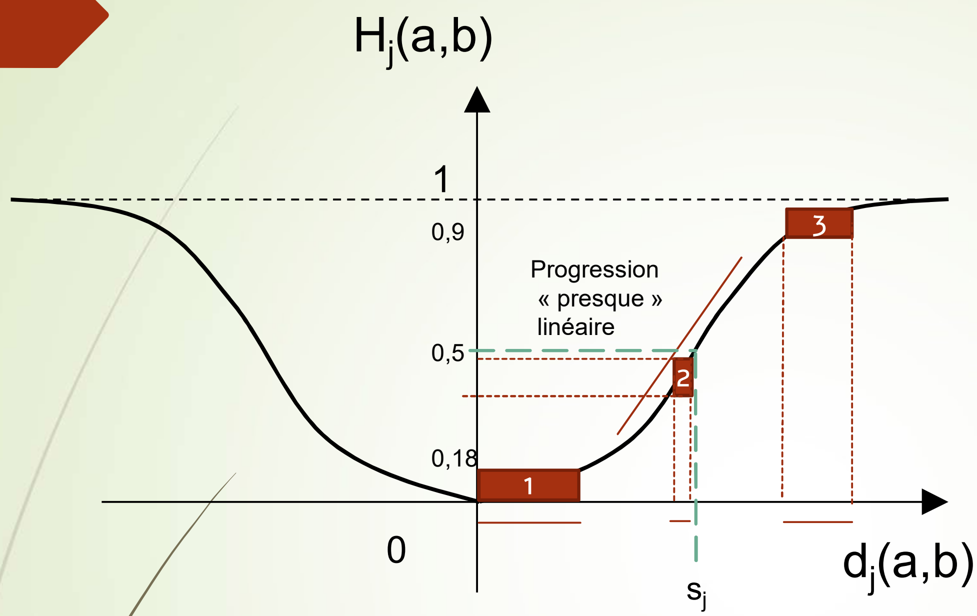
Type V : Critère à préférence linéaire avec zone d'indifférence



$$H_j(d_j) = \begin{cases} 0 \;\; si \;\; |d_j| \le q_j \\ \dfrac{|d_j| - q_j}{p_j - q_j} \;\; si \;\; q_j < |d_j| \le p_j \\ 1 \;\; si \;\; |d_j| > p_j \end{cases}$$

- a I b tant que $|f_j(a) - f_j(b)| < q_j$
- a P b de manière croissante avec écart compris entre q_j et p_j
- a $P_{strictement}$ si écart > seuil p_j.

Type VI : Critère Gaussien



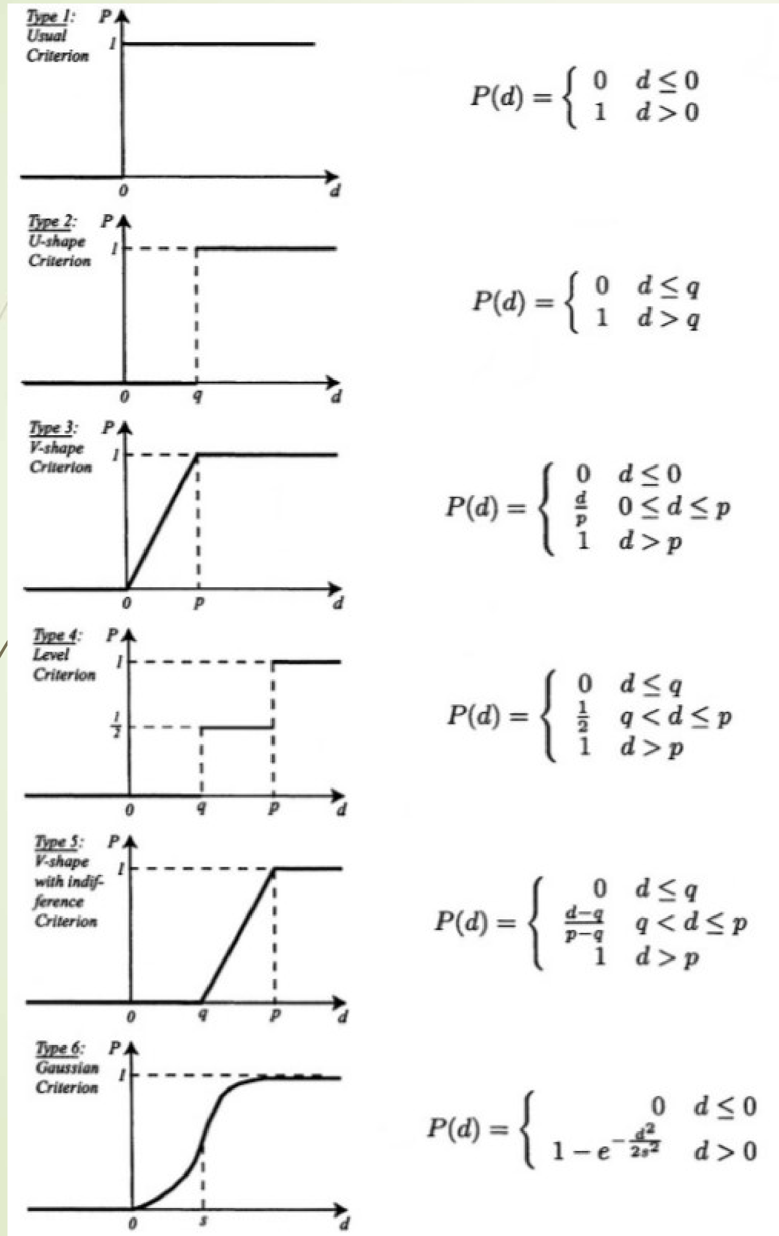
$$H_j(d_j) = 1 - e^{-\frac{d_j^2}{2s_j^2}}$$

- s_j = degré de préférence moyen
- Zone 1 : une différence faible produit une préférence faible
- Zone 2 : si $f_j(a)$-$f_j(b)$ proche de s_j alors préférence moyenne (~0,5)
- Zone 3 : si différence forte => préférence forte (~1)

Conclusion sur $H_j(x)$

- **$H_j(a,b)$ mesure le degré de préférence entre a et b … mais comme la fonction utilise |dj(a,b)| , elle ne précise pas le sens de la préférence …** $a \succsim b$ ou $b \succsim a$
- **Dés lors** (si objectif de maximisation) :
  - $H_j(a,b) = \begin{cases} P_j(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \; si \; d_j(a,b) \geq 0 \\ P_j(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) \; si \; d_j(a,b) < 0 \end{cases}$

6 critères généralisés



- Le décideur doit choisir pour chaque critère la fonction de préférence adéquate
- Les paramètres sont clairs :
  - **q_j** : seuil au-delà duquel l'indifférence cesse
  - **p_j** : seuil au-delà duquel la préférence devient stricte
  - par rapport au critère ***i***
- Demande à l'utilisateur de clarifier sa stratégie

Retour sur $P_j(a,b)$

- **Si $P_j(a,b) > 0 \Rightarrow P_j(b,a) = 0$**
  - Soit en d'autres termes, si a est préféré à b, l'inverse est faux… et comme on ne peut exprimer QUE des degrés de préférence (pas de préférence négative), que $P \in [0,1] \Rightarrow$ la mesure de préférence de b sur a ne peut être que **nulle** …
- **Par contre, on peut avoir $P_j(a, b) = P_j(b, a) = 0$**
  - soit parce que $f_j(a) = f_j(b) \Rightarrow d_j(a, b) = d_j(b, a) = 0$
  - soit $0 < f_j(a) - f_j(b) <$ zone d'indifférence (ou inversement) $\Rightarrow f_j(b) - f_j(a) < 0 \Rightarrow P_j(a,b) = 0$ dans les 2 cas
- La définition des formule inclut **implicitement** un objectif de **maximisation** (elles sont croissantes en fonction de $d_j(a,b)$…)
  - Si on minimise, on veut le plus petit $d_j(a,b)$… ou autrement dit, on maximiser $-d_j(a,b)$…
  - => Si on minimise, on remplace $d_j(a,b)$ par $-d_j(a,b)$ dans les formules (voir exemple détaillé pour explications… détaillées).

Where was I ? What we have …

- ***Valeurs qu'on peut calculer avec fonction de préférence*** $P_j(a,b)$ ***qui détermine « combien » on préfère a à b (entre 0 et 1) en se basant sur*** $f_j(a) - f_j(b)$ ***en ce qui concerne le critère j ! (indépendamment des autres)***

Mesure combien a1 est préféré aux autres →

Critere **j**	a_1	…	a_i	…	a_n
a_1		…	$P_j(a_1,a_i)$		$P_j(a_1,a_n)$
…	…		…	…	…
a_i	$P_j(a_i,a_1)$	…		…	$P_j(a_i,a_n)$
	…	…	…		…
a^n	$P_j(a_n,a_1)$	…	$P_j(a_n,a_i)$	…	

Relation de surclassement valuée

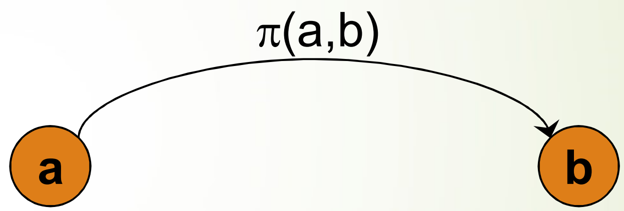
- **Reprenons l'objectif :**
  - **Opt** $\{f_1(x), f_2(x) \ldots f_i(x), \ldots f_n(x) \mid x \in A\}$
  - En associant à chaque $f_j(x)$ un critère généralisé on a alors pour chaque paire a et b les informations suivantes :
    - **$f_j(a)$, $f_j(b)$ et $P_j(a,b)$**
- **On peut définir un indice de préférence multicritère de a sur b comme suivant:**

$$\pi(a,b) = \sum_{j=1}^{k} P_j(a,b) \times w_j \quad avec \quad \sum_{j=1}^{k} w_j = 1$$

- **w_j mesure le poids du critère j : alors**
  - $\pi(a,b) \approx 0 \Leftrightarrow$ faible préférence globale de a sur b
  - $\pi(a,b) \approx 1 \Leftrightarrow$ forte préférence globale de a sur b
- **Le décideur peut faire une analyse de sensibilité pour affiner la valeur de ses poids.**

Transposition sur les relations de dominance

- On peut construire un graphe valué (A, π) ayant pour sommets les éléments de A et pour valeur d'arc reliant 2 points a et b : π(a,b).



  - a domine b si $\pi(a,b) \geq 0$ et $\pi(b,a) = 0$.

- On peut très bien avoir alors $\pi(a,b) > 0$ et $\pi(b,a) > 0$! Cela signifie que a est préféré à b sur certains critères et inversement b l'est à a sur d'autres.

Flux de surclassement

- **Il s'agit de voir comment chaque choix se compare par rapport aux autres …**
- **On va évaluer dans quelle mesure**
  - il domine les autres :
    - => calcul du flux **sortant**

$$\Phi^{+}(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} \pi(a,x)$$

  - Il est dominé par les autres :
    - => calcul du flux **entrant**

$$\Phi^{-}(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} \pi(x,a)$$

  - En tirer éventuellement une synthèse :
    - => calcul du flux **net**

$$\Phi(a) = \Phi^{+}(a) - \Phi^{-}(a)$$

- **Plus a est efficace plus $\Phi^{+}(a)$ est grand et $\Phi^{-}(a)$ est petit.**

En résumé

- **On est passé de k critères à k critères généralisés qui nous ont permis de synthétiser le problème au travers de 3 relations :**
  - $\Phi^{+}(a)$: mesure la dominance de a sur les autres choix (ie sa force)
  - $\Phi^{-}(a)$: mesure la dominance des autres choix sur a (ie sa faiblesse)
  - $\Phi(a)$: mesure la « performance » globale de a sur les autres choix
- **On peut rapidement voir l'usage qu'on peut faire de ces relations !**
  - => Les considérer comme des critères agrégés et donc simplifier le problème de décision (pas forcément le résoudre) en passant de k à 2 voire 1 critères !

PROMETHEE I : rangement partiel

- **A partir des flux entrants et sortants on peut redéfinir les relations de surclassement :**

$$\begin{cases} a\,S^+\,b \Leftrightarrow \Phi^+(a) > \Phi^+(b) \\ a\,I^+\,b \Leftrightarrow \Phi^+(a) = \Phi^+(b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\,S^-\,b \Leftrightarrow \Phi^-(a) < \Phi^-(b) \\ a\,I^-\,b \Leftrightarrow \Phi^-(a) = \Phi^-(b) \end{cases}$$

- **On peut alors redéfinir les relations de dominance, d'indifférence et d'incomparabilité selon PROMOTHEE I comme suivant :**

$$a\,P^I b \Leftrightarrow \begin{cases} a\,S^+\,b \;\; et \;\; a\,S^-\,b \\ a\,S^+\,b \;\; et \;\; a\,I^-\,b \\ a\,I^+\,b \;\; et \;\; a\,S^-\,b \end{cases}$$

a est préféré à b si
a domine plus les autres que b
& a est moins dominé par les autres que b

$$a\,I^I b \Leftrightarrow a\,I^+\,b \;\; et \;\; a\,I^-\,b$$

$$a\,R^I\,b \quad \text{sinon}$$

ie a est plus fort que b mais également plus faible que a !!
(en fctn des critères et de leur poids)

PROMETHEE II : rangement complet

- **A partir des flux nets on retombe dans le cas de l'agrégation des préférences et donc 1 seule valeur numérique**
  - => préordre complet … donc plus d'incomparabilité

$$a\,P^{II}\,b \Leftrightarrow \Phi\ (a) > \Phi\ (b)$$

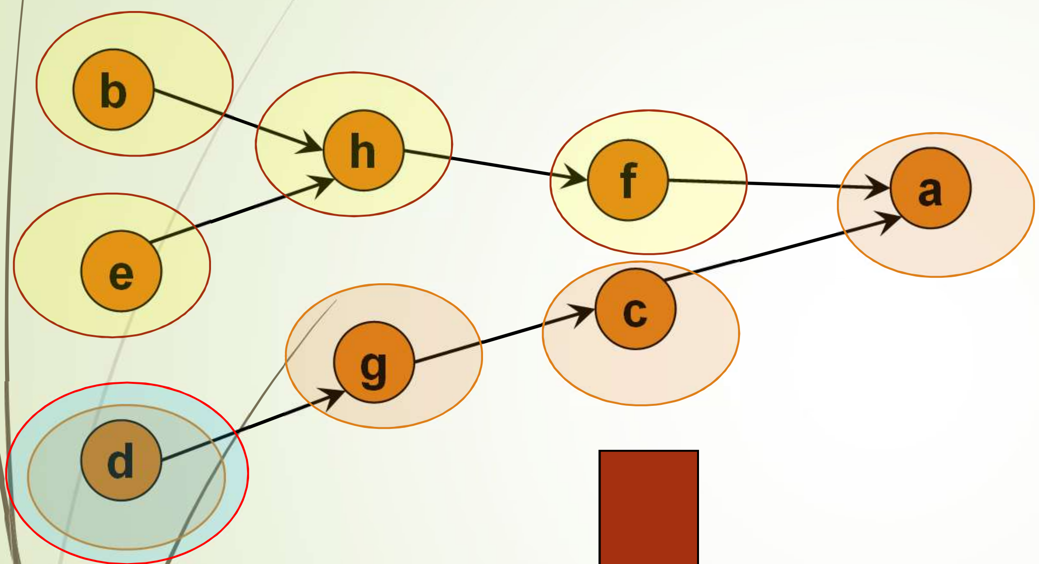
$$a\,I^{II}\,b \Leftrightarrow \Phi\ (a) = \Phi\ (b)$$

Exemple : GRH & sélection d'un candidat

- **Recrutement d'un DG parmi 8 candidats.**
- **Pas de candidat optimal (ie qui domine les autres sur tous les critères)**
- **=> approche multicritère => PROMETHEE**
- **6 critères évalués**
  - Expérience en comptabilité
  - Maîtrise de l'informatique
  - Valeur des diplômes
  - Adaptabilité
  - Connaissance du marché
  - Culture générale

Source Brans & Mareschal

Exemple : GRH & sélection d'un candidat



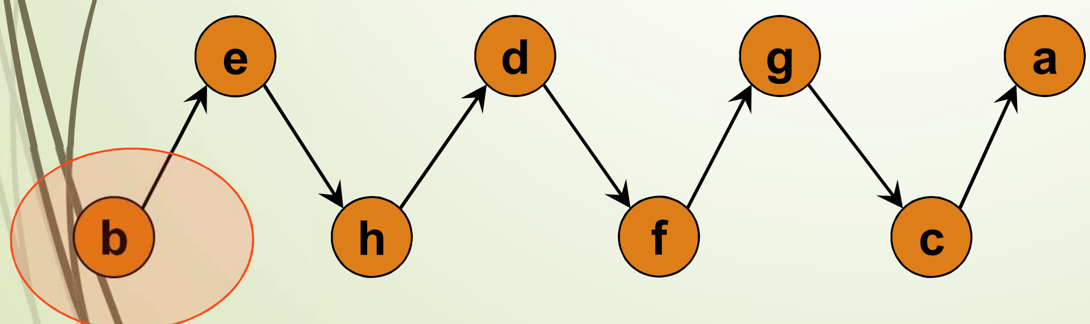
PROMETHEE I

~ 50 ans

~ 40 ans

≠ exp. Compta & info

Or info avenir de l'entreprise => choix final **d**



PROMETHEE II

Exemple : GRH & sélection d'un candidat

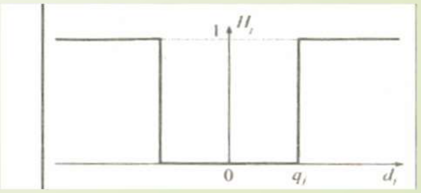
Conclusion

- Il ne s'agit pas d'accepter aveuglement les classements ou choix de tel ou telle méthode !!
- La méthode peut souligner de nouveaux critères ou renvoyer la question des priorités et la stratégie de l'entreprise lorsqu'il faut trancher sur des choix incomparables

Source Brans & Mareschal

Exemple : Construction d'une centrale électrique

- Construction d'une centrale électrique
- **6 sites pressentis**
  - a_1 : Italie
  - a_2 : Belgique
  - a_3 : Allemagne
  - a_4 : Suède
  - a_5 : Autriche
  - a_6 : France
- **6 critères retenus**
  - f1 : Nb ingénieurs
  - f2 : Puissance en 10 MW
  - f3 : Coût construction (M° $)
  - f4 : Coût annuel maintenance (M° $)
  - f5 : Nb villages à évacuer
  - f6 : Degré sécurité population
- **Poids critères égaux (1/6)**
- **Choix critères généralisés :**
  - f_1 : Δ 10 ingénieurs indifférent et au-delà stricte => type II avec q = 10

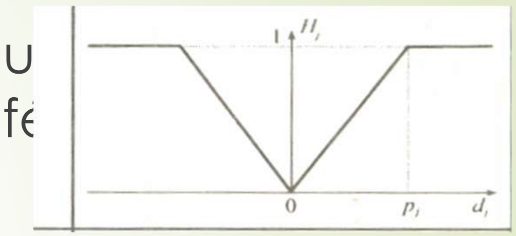


Source Brans & Mareschal

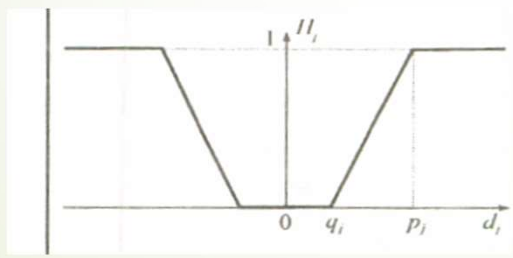
Exemple : Construction d'une centrale électrique

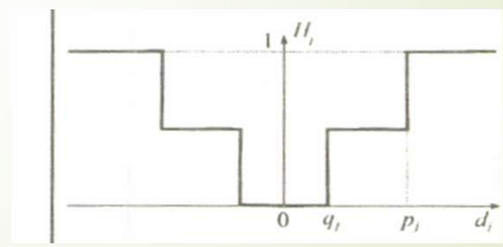
❑ Choix critères généralisés :

- f_2 : considère que plus la centrale produ un seuil de 30 (x10 MW), au-delà la préfé => type III avec p=30.

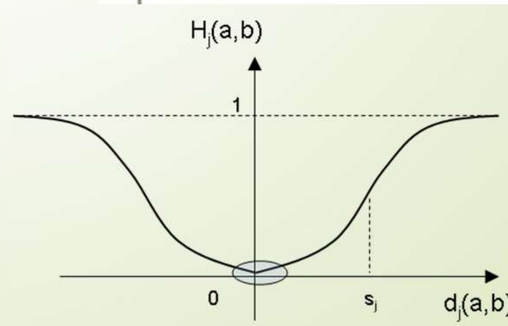


- f_3 : coût de construction & maintenance, décideur définit une plage d'indifférence => V & IV





- Pour la sécurité => VI



Source Brans & Mareschal

Exemple : Construction d'une centrale électrique

- Villages à évacuer : la solution en évacuant le moins est considérée comme étant strictement préférée.

Données

Critères Min/Max Type Paramètres Poids	Ingénieurs Min II q=10 1	Puissance Max III p=30 1	Coûts Min V q=50,p=500 1	Mainten. Min IV q=1, p=6 1	Villages Min I – 1	Sécurité Max VI s=5 1
a_1 : Italie	80	90	600	5.4	8	5
a_2 : Belgique	65	58	200	9.7	1	1
a_3 : Allemagne	83	60	400	7.2	4	7
a_4 : Suède	40	80	1000	7.5	7	10
a_5 : Autriche	52	72	600	2.0	3	8
a_6 : France	94	96	700	3.6	5	6

Source Brans & Mareschal

Exemple : Construction d'une centrale électrique

- **Calculs de : $\pi(x,y)$.**

Source Brans & Mareschal

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	ϕ^+	ϕ^-	ϕ
a_1	–	.30	.25	.27	.10	.19	.22	.37	–.15
a_2	.46	–	.39	.33	.30	.50	.40	.38	+.02
a_3	.24	.18	–	.33	.06	.43	.25	.34	–.09
a_4	.40	.51	.31	–	.22	.21	.33	.35	–.02
a_5	.44	.52	.49	.38	–	.45	.45	.16	+.29
a_6	.29	.40	.25	.43	.13	–	.30	.35	–.05
ϕ^-	.37	.38	.34	.35	.16	.35			

- **Remarque :** imaginons une fonction d'utilité U «volontairement» basique[1] qui se limite à un somme des évaluations des critères (+ si maximisation, - si minimisation)

=> **$U(a_1)$=-80+90-600-5,4**

Remarque sur le caractère relatif du calcul de flux

- **$U(a_1)$=-80+90-600-5,4-8+5 = -598,4. $U(a_5)$=-577**

  Dans ce cas, la mesure de préférence est **absolue** : elle tient uniquement compte des valeurs de critères sans référence aux autres alternatives

Critères Min/Max Type Paramètres Poids	Ingénieurs Min II q=10 1	Puissance Max III p=30 1	Coûts Min V q=50,p=500 1	Mainten. Min IV q=1, p=6 1	Villages Min I – 1	Sécurité Max VI s=5 1
a_1 : Italie	80	90	600	5.4	8	5
a_2 : Belgique	65	58	**200**	9.7	**1**	1
a_3 : Allemagne	83	60	400	7.2	4	7
a_4 : Suède	**40**	80	1000	7.5	7	**10**
a_5 : Autriche	52	72	600	**2.0**	3	8
a_6 : France	94	**96**	700	3.6	5	6

	ϕ^+	ϕ^-	ϕ
a_1	.22	.37	−.15
a_2	.40	.38	+.02
a_3	.25	.34	−.09
a_4	.33	.35	−.02
a_5	.45	.16	+.29
a_6	.30	.35	−.05

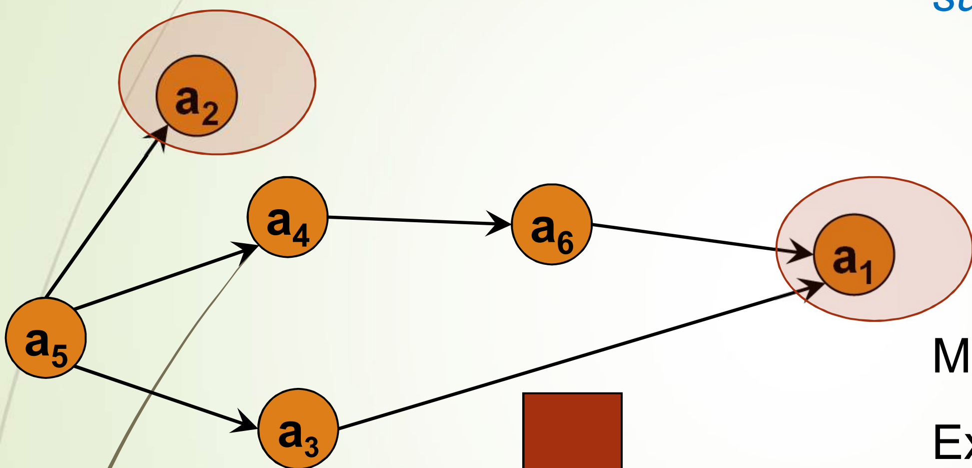
- **A contrario**, le calcul de flux est issus des calculs comparatifs par paire d'alternative, il calcul donc une force **relative** et non absolue des alternatives…

  Attention : cette fonction d'utilité agrégative a peu de sens (somme de valeur aux unités différentes, à l'amplitude de valeurs différente [40,94] [200,1000]) qui donne de fait une grande importance au critère « Coût » et une faible importance au critère « nombre de village à évacuer »… mais a l'intérêt de bien illustrer le propos …

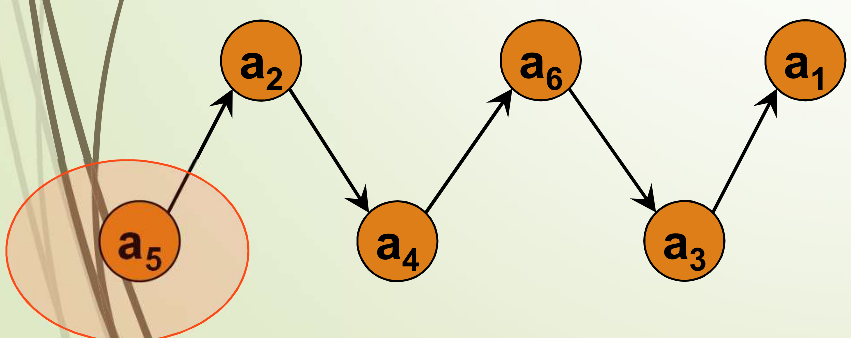
Exemple : Construction d’une centrale électrique

Exemple / calculs détaillés disponible sur mon site internet.

PROMETHEE I



PROMETHEE II



Modifier les poids change tout !

Ex : 50% a la puissance => France

55% villages => Belgique

Critères Min/Max Type Paramètres Poids	Ingénieurs Min II q=10 1	Puissance Max III p=30 1	Coûts Min V q=50,p=500 1	Mainten. Min IV q=1, p=6 1	Villages Min I – 1	Sécurité Max VI s=5 1
a_1 : Italie	80	90	600	5.4	8	5
a_2 : Belgique	65	58	**200**	9.7	**1**	1
a_3 : Allemagne	83	60	400	7.2	4	7
a_4 : Suède	**40**	80	1000	7.5	7	**10**
a_5 : Autriche	52	72	600	**2.0**	3	8
a_6 : France	94	**96**	700	3.6	5	6

PROMETHEE & GAIA….

Le plan GAIA : principe général

- **Constat de l'analyse multi-critère :**
  - Les problèmes sont en général mal formés
  - Pas de solution optimale
  - Il s'agit alors de trouver un compromis entre des critères d'importance relative différent
  - Ce n'est plus un problème d'optimisation (contrairement à un problème unicritère ou une méthode d'aggrégation « aveugle)
- **La méthode Prométhée**
  - Propose une méthode de calcul permettant de conserver l'approche multicritère en assouplissant la notion de préférence (jusqu'ici basé sur la supériorité numérique stricte)
  - L'interclassement des solutions positionne globalement les alternatives les unes par rapport aux autres…
  - Mais on perd la vision détaillée (critères) permettant de mieux mesurer le degré de dominance entre alternatives.

Le plan GAIA : principe général

- **À partir de PROMETHEE proposer une visualisation graphique des solutions…**
  - Pour « concrétiser » la proximité ou la distance des solutions les unes ./. aux autres dans l'espace des critères
- **Rappel on est parti :**
  - Des critères de décision $f_j(a)$
  - Pour retenir les critères généralisés $P_j(a)$
  - Agrégés en $\pi(a,b)$
  - Avec pour finir $\Phi_j(a)$, $\Phi_j^+(a)$ et $\Phi_j^-(a)$

$$\Phi^+(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{x \in A}\pi(a,x) \quad \Phi^-(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{x \in A}\pi(x,a) \quad \Phi(a) = \Phi^+(a) - \Phi^-(a)$$

Flux de unicritère

- **On peut également remarquer :**

$$\Phi^+(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{x\in A}\pi(a,x) = \frac{1}{n-1}\sum_{x\in A}\sum_{j=1}^{k} P_j(a,x)\times w_j = \sum_{j=1}^{k}\Phi_j^+(a)\times w_j$$

$$\Phi^-(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{x\in A}\pi(x,a) = \frac{1}{n-1}\sum_{x\in A}\sum_{j=1}^{k} P_j(x,a)\times w_j = \sum_{j=1}^{k}\Phi_j^-(a)\times w_j$$

- **On obtient alors des flux entrant et sortant unicritère :**

$$\Phi_j^+(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{x\in A} P_j(a,x) \quad avec \;\; j = 1,2\ldots,k$$

$$\Phi_j^-(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{x\in A} P_j(x,a) \quad avec \;\; j = 1,2\ldots,k$$

- **Quel sens ont ces flux :** what do they mean… (it was also a pun)

Flux de unicritère

- **Quel sens ont ces flux :** what do they mean…
  - $\Phi_j^+(\boldsymbol{a})$ => Mesure de la dominance (préférence) de **a sur les autres alternatives**
  - $\Phi_j^-(\boldsymbol{a})$ => Mesure de la dominance (préférence **des autres alternatives** sur **a**
  - $\Phi_j(\boldsymbol{a}) = \Phi_j^+(\boldsymbol{a}) - \Phi_j^-(\boldsymbol{a})$ => Mesure de la préférence relative/comparée de a vis-à-vis des autres alternatives
  - $\Phi_j^{+/-}(\boldsymbol{a})$ sont calculés :
    - En utilisant la fonction de préférence choisie pour **j**
    - En comparant a aux autres solutions
    - =>application d'effet d'échelle, normalisation des valeurs entre [0,1],

Le plan GAIA : principe général

- On peut alors construire la matrice suivante :

Valeurs brutes

	$f_1(.)$	…	$f_j(.)$	…	$f_k(.)$
a_1	$f_1(a_1)$	…	$f_j(a_1)$		$f_k(a_1)$
…	…	…	…	…	…
a_i	$f_1(a_i)$	…	$f_j(a_i)$	…	$f_k(a_i)$
	…	…	…	…	…
a^n	$f_1(a_n)$	…	$f_j(a_n)$	…	$f_k(a_n)$

	$\Phi_1(.)$	…	$\Phi_j(.)$	…	$\Phi_k(.)$
a_1	$\Phi_1(a_1)$	…	$\Phi_j(a_1)$		$\Phi_k(a_1)$
…	…	…	…	…	…
a_i	$\Phi_1(a_i)$	…	$\Phi_j(a_i)$	…	$\Phi_k(a_i)$
	…	…	…	…	…
A^n	$\Phi_1(a_n)$	…	$\Phi_j(a_n)$	…	$\Phi_k(a_n)$

Valeurs « relativisées » = Φ

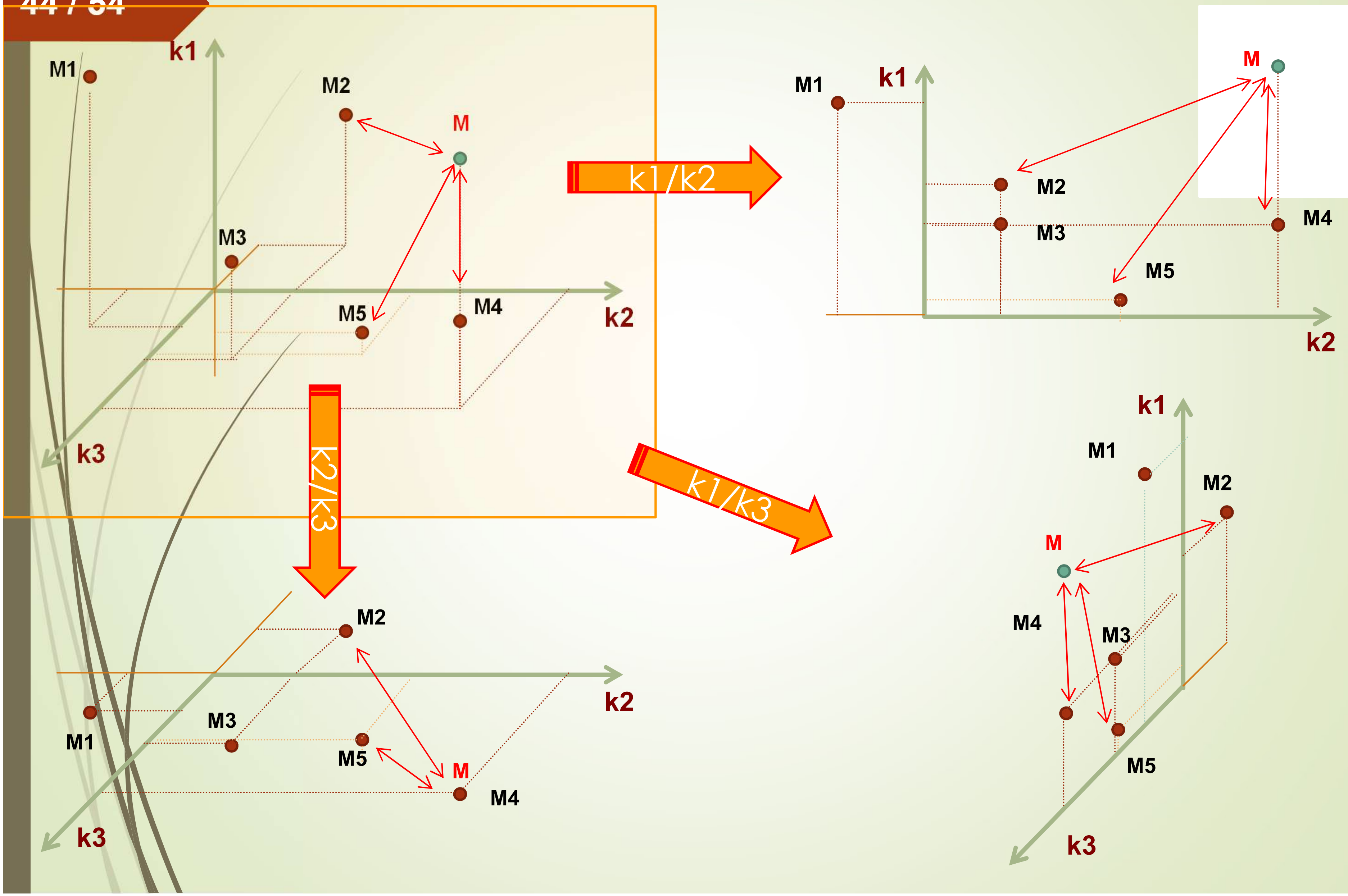
Le plan GAIA : principe général

- On a donc une représentation du choix a dans $\mathbb{R}^k$

a_i	$\Phi_1(a_i)$	$\cdots$	$\Phi_j(a_i)$	$\cdots$	$\Phi_k(a_i)$

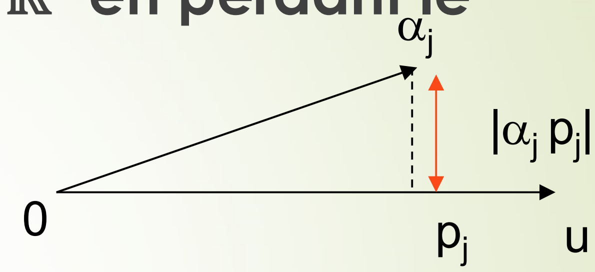
- Ce n'est pas juste un changement de repère ! Car :
  - Valeurs critères généralisées normées [0,1] vs valeurs brutes
  - résultant de la comparaison 2 a 2 des alternatives entre elles selon la fonction de préférence de chaque critère …
- Visualisation graphique pour le décideur ?
  - => impossible à représenter dés lors que k > 3!!!
  - => projeter dans $\mathbb{R}^2$ de manière à respecter au maximum les distances relatives ?
- Solution :
  - => analyse en composante principale …

Illustration comment passer de $\mathbb{R}^k$ à $\mathbb{R}^2$



Analyse en composante principale

- **Pb : comment passer de $\mathbb{R}^k$ à $\mathbb{R}^2$ en perdant le minimum d'information…**



- **On va chercher un plan qui minimise globalement la distance d'un point à sa projection ($|\alpha_j\, p_j|$) … et ce pour tous les α_j.**
- **Donc il s'agit de respecter la variance (mesure de la dispersion du nuage de point constitué par Φ) et la covariance (mesure de « dépendance » relative entre 2 points) des choix.**

Analyse en composante principale

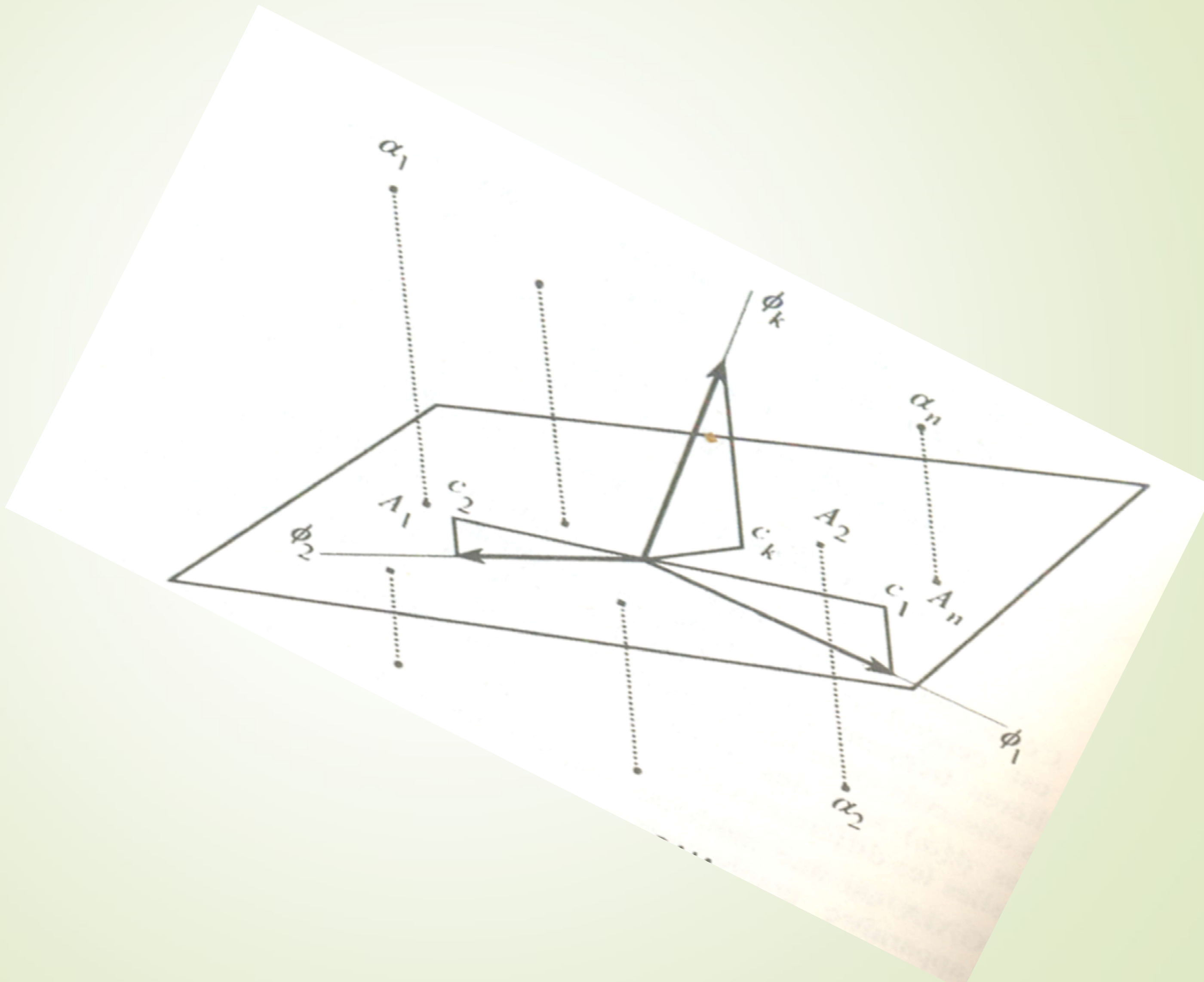
- **Solution (démonstration mathématique disponible)**
  - Considérer Φ comme une matrice
  - en calculer les vecteurs propres (λ_1, $\lambda_{2...}$ λ_k)
  - Qui permettent alors de trouver la position optimale du plan $\mathbb{R}^2$ dans à $\mathbb{R}^k$ …
  - La précision est calculé comme suivant :

$$\delta = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j}$$

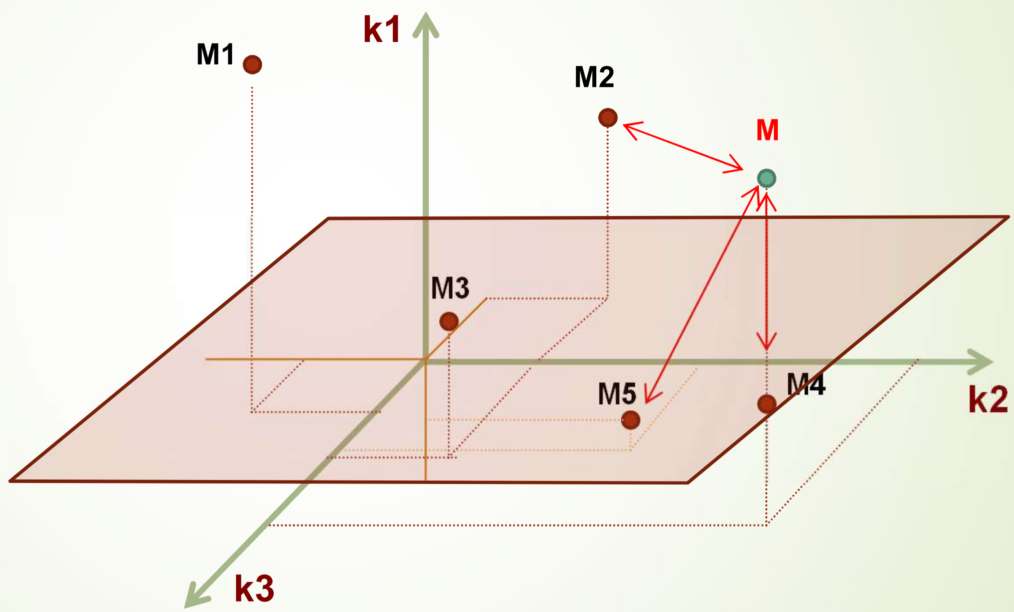
Analyse en composante principale

- A partir de cette approche, l'analyse du problème de décision est reformulé comme une analyse « statistique » du nuage de point…
- On peut également projeter le vecteur des poids
  - $w = (w_1,\ldots,w_j, \ldots, w_k)$
  - forme avec l'origine du plan Gaia un « stick de décision » indiquant l'axe des « meilleures décision ».
  - Si on considère les points $(0, w_k)$ comme formant les axes de l'espace $\mathbb{R}^k$ on les retrouvera dans $\mathbb{R}^2$ $(0, c_k)$

Analyse en composante principale

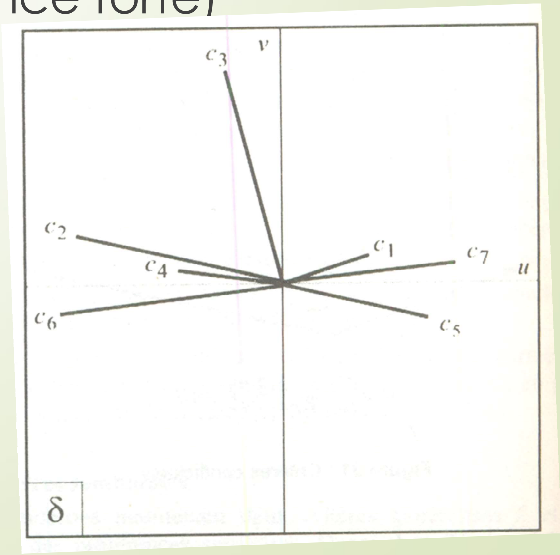


comment passer de $\Re^k$ à $\Re^2$



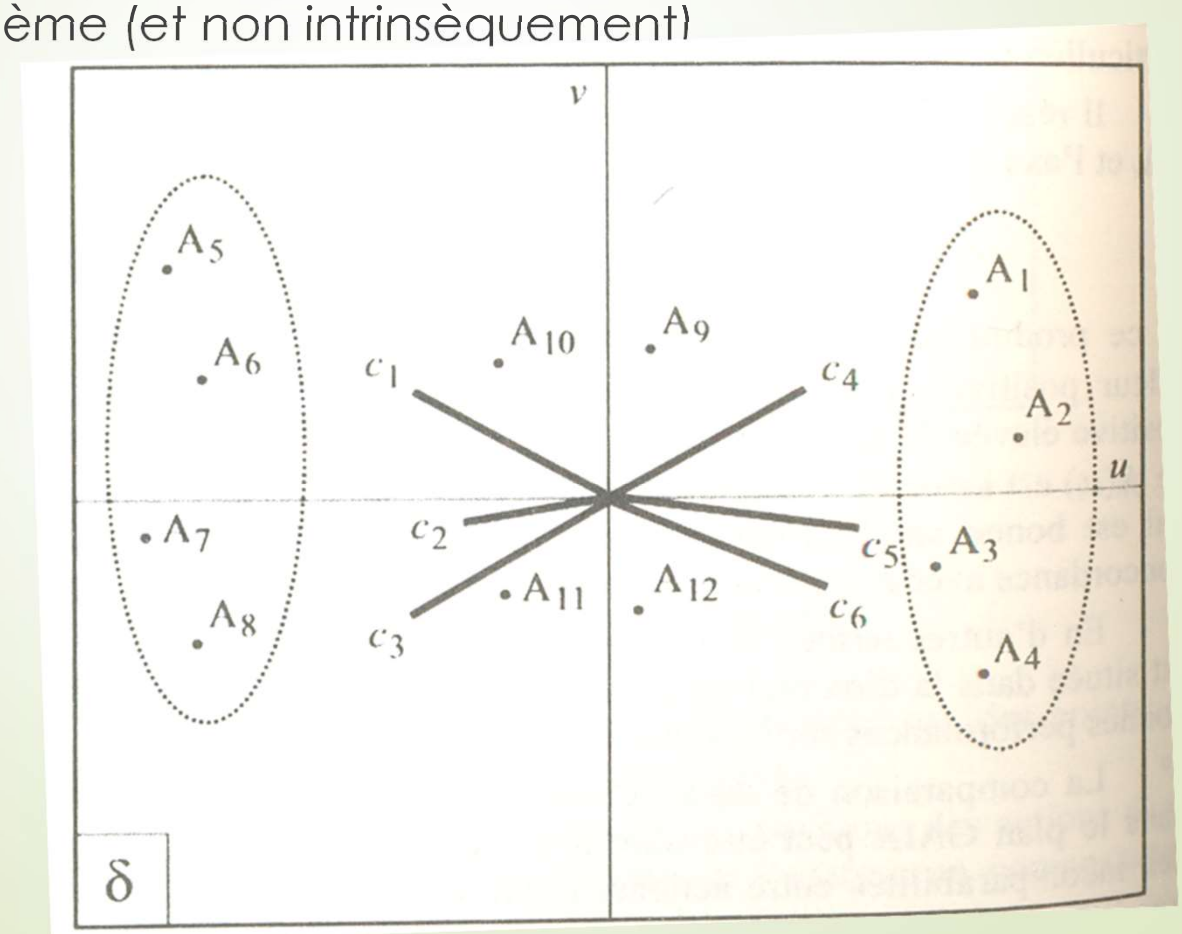
Analyse en composante principale

- Si on considère les points (c_k) résultant de la projection de w_k dans le plan Gaia : $|c_k|$ mesure l'importance du critère k dans l'explication de la dispersion des points…
- Donc des choix comparables (formant par exemple un préordre complet) seront proches dans le plan Gaia
- Des critères équivalents (ie donnant les mêmes résultats dans le classement des solutions) seront également proches dans Gaia (angle faible entre les 2 vecteurs critères ie covariance forte)
- A l'opposé pour des critères conflictuels les points seront plus distants (angle fort entre les 2 vecteurs critères ie covariance faible)



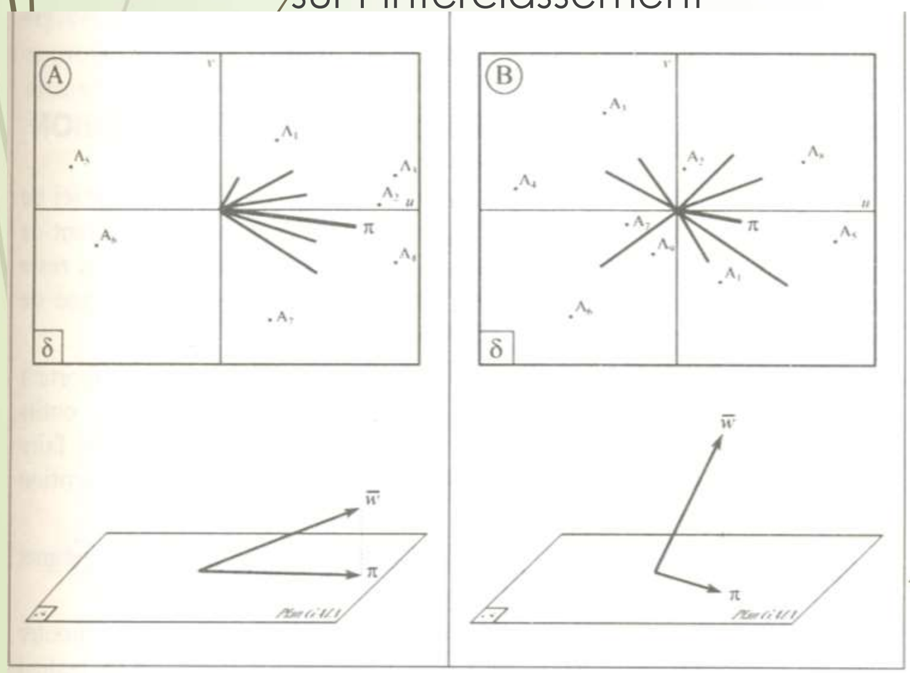
Analyse en composante principale : exemple

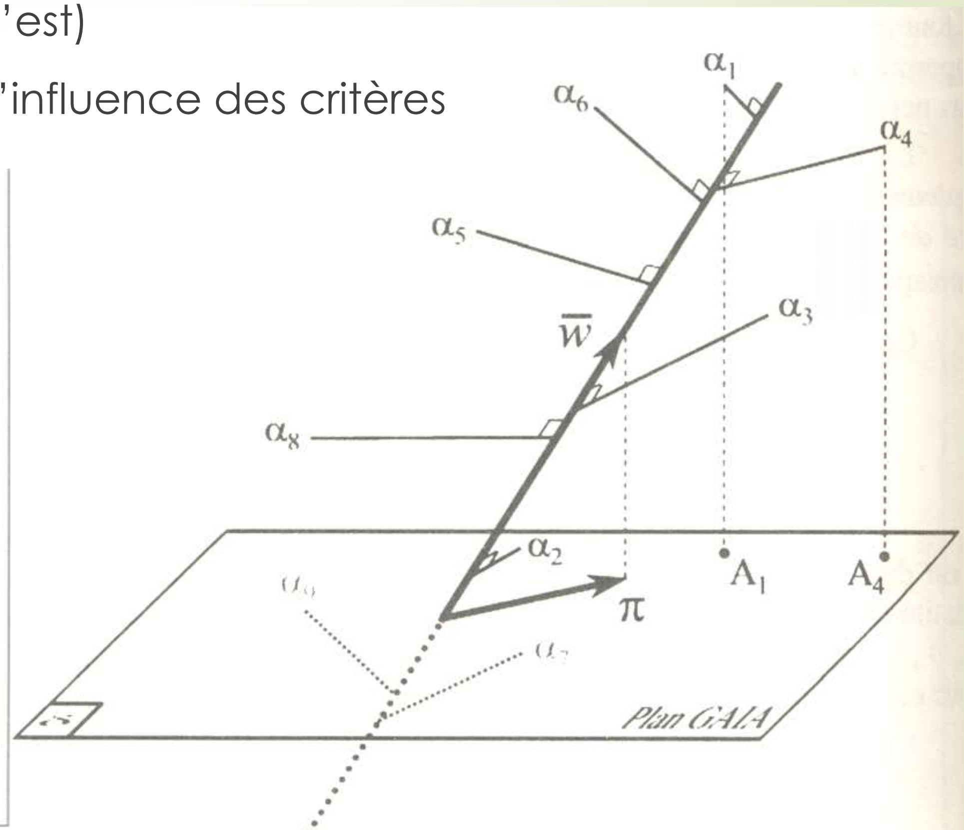
- **Mais attention :**
  - si la précision δ est faible, le plan Gaia n'est pas fiable …
  - La conflictualité des critères est mesurée au vu des données du problème (et non intrinsèquement)



Axe de décision

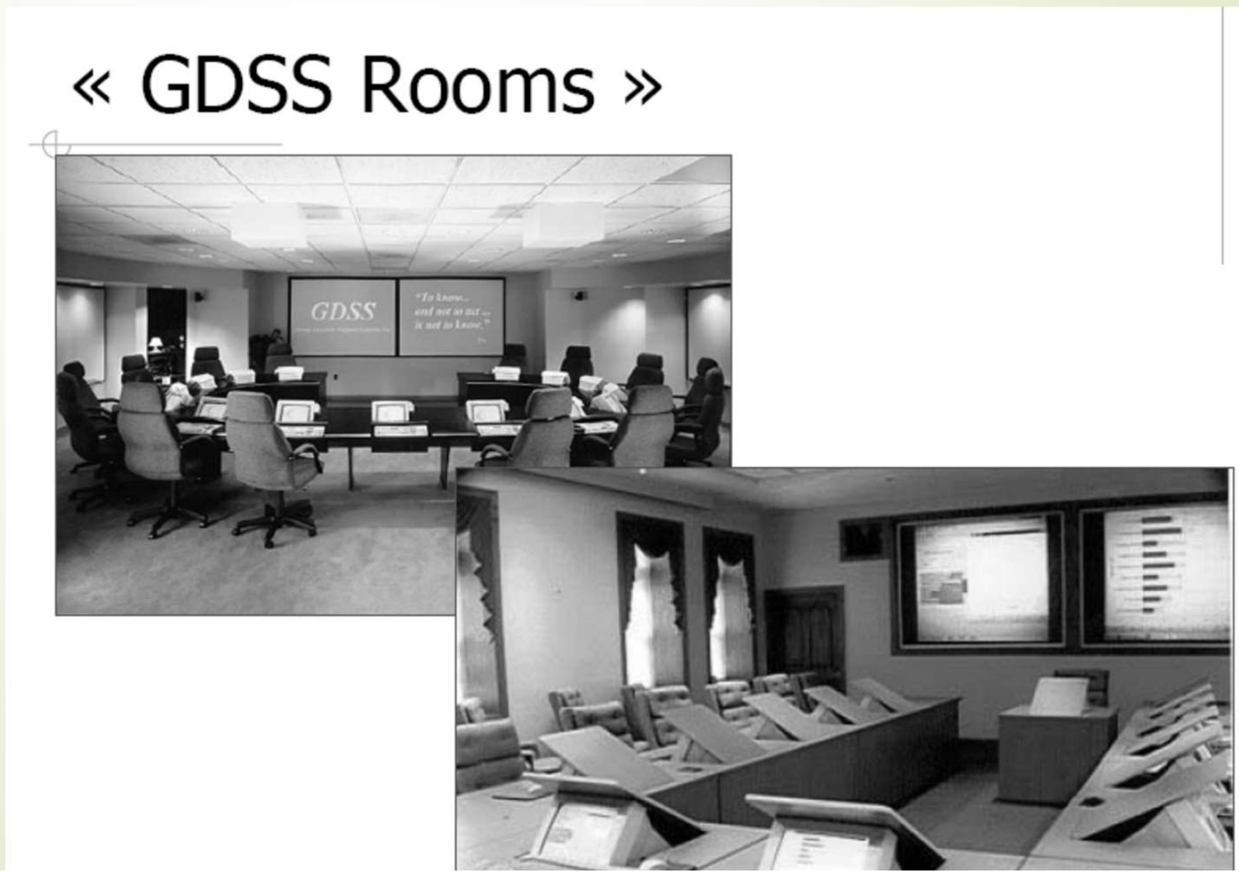
- **Reconsidérons le vecteur w (w_1,…,w_j, …, w_k) des critères**
- **Sa projection dans le plan Gaia donne π.**
  - Si π est court : alors les critères sont très conflictuels (donc compromis indispensable)
  - Si π est long alors il donne la direction des meilleures solutions (plus on s'éloigne de l'origine mieux c'est)
  - On peut jouer sur π pour voir l'influence des critères sur l'interclassement





Application de l’outils

- Base pour un GDSS (Group Decision Support System) ie Système Interactif d’Aide à la Décision de Groupe.
- Cf. Travaux autour de l’aide à la négociation de B. Espinasse.



Outil « gratuit » Promethée Gaia

- Un des auteurs de la méthode propose une version gratuite d'un outil d'aide à la décision pour un usage académique (ie enseignement ou recherche).
- Téléchargez le ici : PROMETHEE | Bertrand Mareschal (ulb.be)
- Version zippé (qui ne nécessite pas d'installation) dispo sur page accès protégé.

A noter :
- Les critères généralisés sont appelés Fonction de préférence dans le logiciel. A droite, vous avez les noms correspondant.
- L'outil propose également une aide à la sélection/au paramétrage de ces fonctions