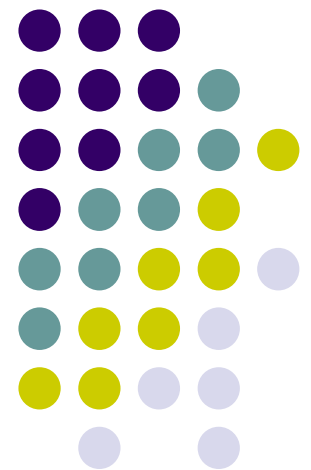


Méthodes et Outils pour l'aide à la décision

Théorie des jeux

Erwan TRANVOUEZ
erwan.tranvouez@univ-amu.fr

Maître de Conférences
Polytech Marseille



Sommaire

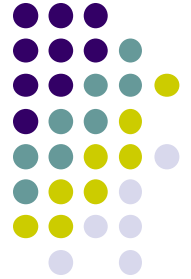


- ❑ Motivation & Introduction de la théorie des jeux
 - Historique
 - Situation & Représentation des jeux (Normale, Extensive)
- ❑ Solutions / Notions d'équilibre
 - ❑ Fonction de meilleur réponse / Nash
- ❑ Choix dans l'incertain appliqués à la théorie des jeux
- ❑ Divers raisonnements à partir de la théorie des jeux

Bibliographie



- Théorie des jeux, M. Yildizoglu, Dunod, 2003
- Encyclopédie *Encyclopaedia Universalis*...
- La théorie des jeux et les outils d'analyse des comportements stratégiques, T. Pénard 2004



MOTIVATIONS & INTRODUCTION DE LA THÉORIE DES JEUX

WHY ?

Origine



- Prémisses remontent aux temps anciens, puis au 17^{ème} . on fait de la théorie de jeux « sans le savoir »
- En 1944, publication de «Theory of Games and Economic Behavior” par John von Neumann and Oskar Morgenstern
- Hypothèses de base :
 - Les acteurs sont rationnels et poursuivent des buts exogènes et indépendants
 - Ils tiennent compte ou anticipent les actions des autres acteurs (stratégie).
- Il s’agit de proposer une modélisation mathématique simplifiée (abstraite) sur la base de laquelle des calculs peuvent être effectués pour arriver à la meilleure décision ...
- => **Optimiser les gains**

Théorie des jeux & aide à la décision



- Jusqu'ici nous avons vu comment **1** décideur pouvait choisir parmi **n** solution selon **k** critères...
 - => décision individu versus « environnement » décisionnel
- La théorie des jeux s'intéresse à la question du choix dans un groupe d'acteur :
 - Lorsque leurs actions sont interdépendantes :
 - ie les actions de l'un auront un impact sur celles des autres (sinon chacun fait ce qu'il veut)
 - & le décideur veut tenir compte de cette interdépendance dans ses prises de décision...
 - le agir en connaissance de cause ...
 - dans le but de maximiser ses gains
- Qualifiée parfois de théorie de la décision en interaction...

Illustration : le dilemme du prisonnier



- **2 prisonniers** sont enfermés en vue d'être jugés
- **Ils ne peuvent pas communiquer**
- Le **choix** de dénoncer ou non l'autre **influe** sur son avenir et celui de l'autre prisonnier
- Les autorités proposent indépendamment à chaque accusé de coopérer avec elles ... en faisant à chacun les propositions suivantes :
 - *Si tu collabores et dénonces ton collègue, nous abandonnons les charges contre toi et ferons condamner ton co-accusé pour 10 ans.*
 - *Si tu nies tout et que ton co-accusé te dénonce, il sera libéré et c'est toi qui sera condamné à 10 ans.*
 - *Si vous niez tous les deux, vous prendrez 2 ans* (charges limitées faute de preuves suffisantes)
 - *Si vous vous dénoncez tous les deux, vous prendrez 5 ans chacun.*
- Que choisiriez vous à leur place ?
 - Selon que vous connaissez l'autre accusé ou non
 - Selon que votre emprisonnement ait des conséquences que sur vous ou non (familiale ...)
 - Selon que votre décision vous soit reprochée un jour ou non
 - Selon les durées impliquées ...
 - Si vous pouviez communiquer avec l'autre accusé...

Théorie des jeux : applications



- *Économie* : marketing et stratégie commerciale
 - Ex :
- *Gestion des risques* : scénario possibles et choix des parades
 - Ex :
- *Politique* : prise de décision, gestion de crises
 - Ex: crise des missiles de Cuba, guerre froide (équilibre de la terreur)
- *Sociologie* : comportement des groupes...



Différents types de jeux

- Les situations sont nombreuses elles peuvent être catégorisées en fonction des critères suivants :
 - Relations entre les acteurs (coopératif vs non coopératif ie actions de joueurs indépendants ou d'un groupe de joueur ex. cartel)
 - Déroulement dans le temps (simultané vs séquentiel)
 - Degré d'information des agents (parfaite vs imparfaite, complète vs incomplète)



Hypothèse de rationalité

- Rappel :
 - A l'ensemble des actions
 - C l'ensemble des conséquences
 - $g()$ fonction de conséquence sur $A \rightarrow C$
 - $f()$ fonction de préférence (utilité/gains) sur $C \rightarrow \mathbb{R}$
- Il s'agit d'optimiser $f(a)$

Définition d'un jeu : forme normale



- La *forme normale* d'un jeu est définie par :
 - Un ensemble de n joueurs
 - Pour chaque joueur un ensemble de stratégies s_i .
 - Pour chaque joueur une fonction de gain qui représente les préférences du joueur $u_i(S)$
ou $S = \{s_1, \dots, s_i, \dots, s_n\}$
 - Dés lors il s'agit d'optimiser $u_i(S)$:
 - Dans un jeu à **somme nulle** : $\sum_{i=1}^n U_i(S) = cte$ donc tout gain est obtenu au dépend d'un autre joueur.
 - Dans un jeu à somme non nulle : le gain individuel n'interdit pas le gain d'un ou plusieurs individus voire de l'ensemble des joueurs.
- S'applique au jeux simultanés...

Définition d'un jeu : forme normale

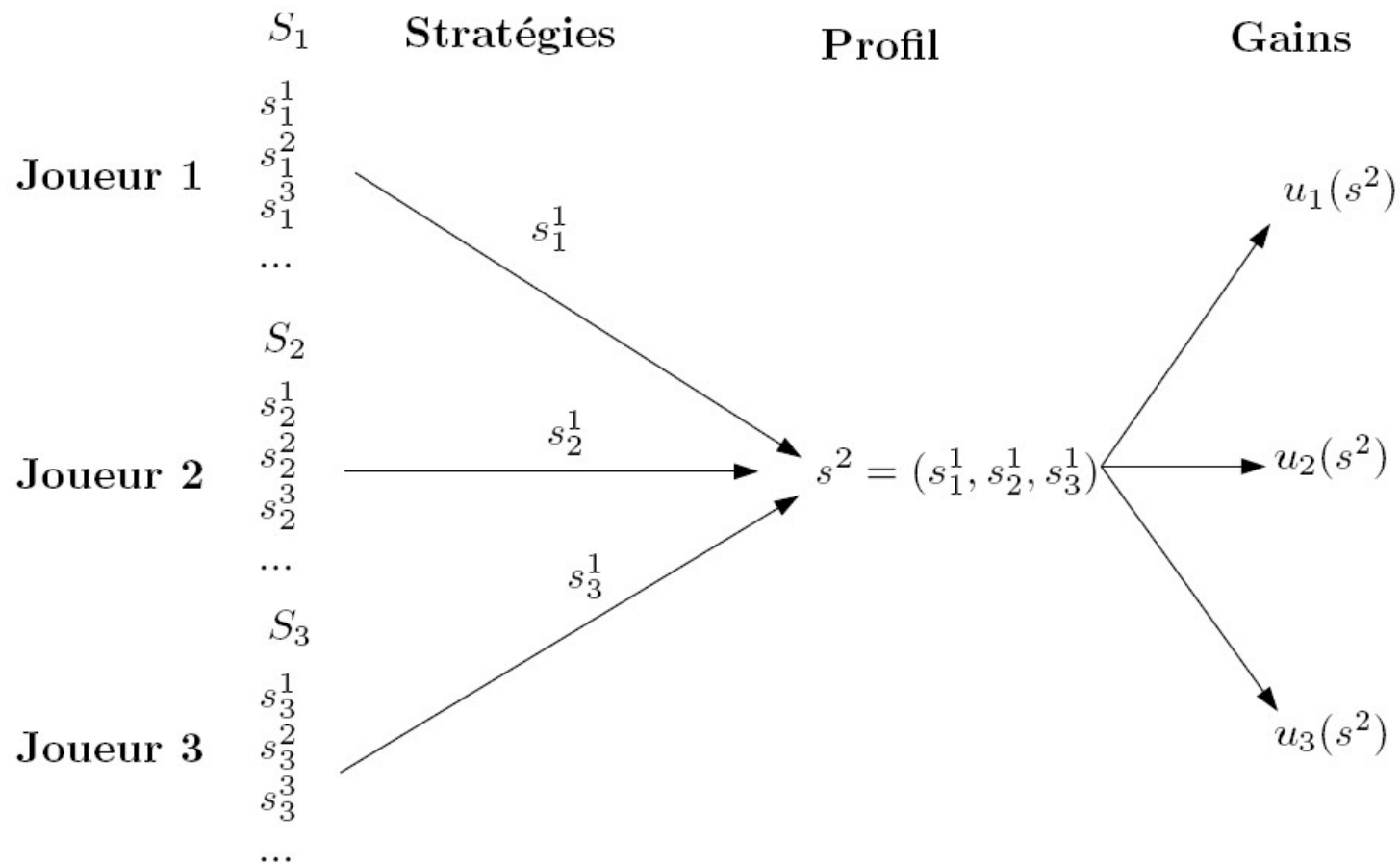


Illustration : le dilemme du prisonnier



- Traduction en forme normale :

Prisonnier 2 Prisonnier 1		Dénoncer	Ne Pas Dénoncer
		Dénoncer	Ne Pas Dénoncer
Dénoncer	Ne Pas Dénoncer	(5, 5)	(0, 10)
		(10, 0)	(2, 2)

Exercice



- Vous avez retenu 2 sujets de stage pour lesquels vous devriez faire un entretien. Sur l'un des stages retenus, celui que vous préférez, vous êtes en concurrence avec un autre élève ingénieur que vous pensez être plus proche que vous du profil de la mission de stage proposée. Vous devez décider quel stage choisir ...
- Le stage de l'entreprise 1 est rémunéré 800 € alors que celui de l'entreprise 2 ne l'est qu'à une hauteur de 500 €.
- Le stage 1 requiert un niveau élevé en Technologie T, alors que le 2^{ème} ne demande qu'un niveau débutant.
- Le stage 2 requiert un niveau élevé en Technologie V, alors que le 1^{er} ne demande qu'un niveau débutant.
- Donner la forme normale du jeu ainsi défini selon que :
 - Vous maîtrisez la technologie V
 - Votre collègue maîtrise la technologie T

Exercice: hypothèse compétences complémentaire



- Traduction en forme normale :

Vous (V)	Lui/Elle (T)	Stage 1 (T / 800€)	Stage 2 (V / 500€)
Stage 1 (T / 800€)		(,)	(,)
Stage 2 (V / 500€)		(,)	(,)

Exercice: hypothèse compétences complémentaire



- Traduction en forme normale :

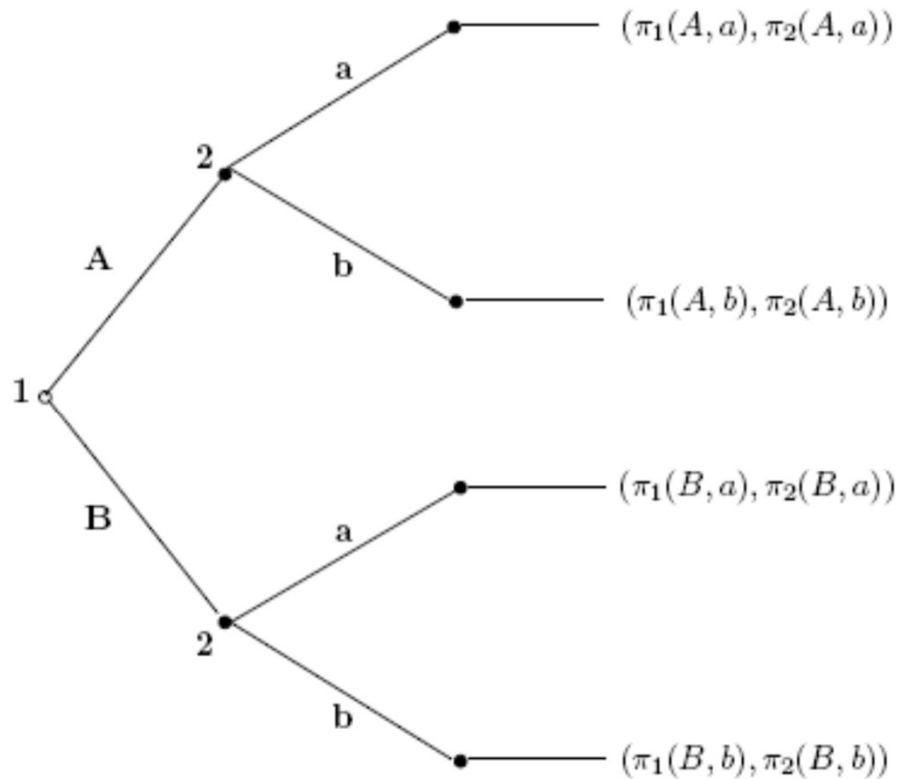
Vous (V)	Lui/Elle (T)		
		Stage 1 (T / 800€)	Stage 2 (V / 500€)
Stage 1 (T / 800€)		(0, 800)	(800, 500)
Stage 2 (V / 500€)		(500, 800)	(500, 0)

Définition d'un jeu : forme extensive



- S'applique aux jeux séquentiels :
 - Joueur agissent l'un après l'autre
 - Possibilité de + sieurs tours...
- La *forme extensive* d'un jeu est définie par :
 - un arbre de jeu contenant un nœud initial, des nœuds de décisions, des nœuds terminaux et des branches reliant chaque nœud à ceux qui lui succèdent.
 - Un ensemble de n joueurs
 - Pour chaque nœud de décision, le nom du joueur qui a le droit de choisir une stratégie à ce nœud.
 - Pour chaque joueur i , la spécification de l'ensemble des actions permises à chaque nœud où il est susceptible de prendre une décision.
 - La spécification des gains de chaque joueur à chaque nœud terminal

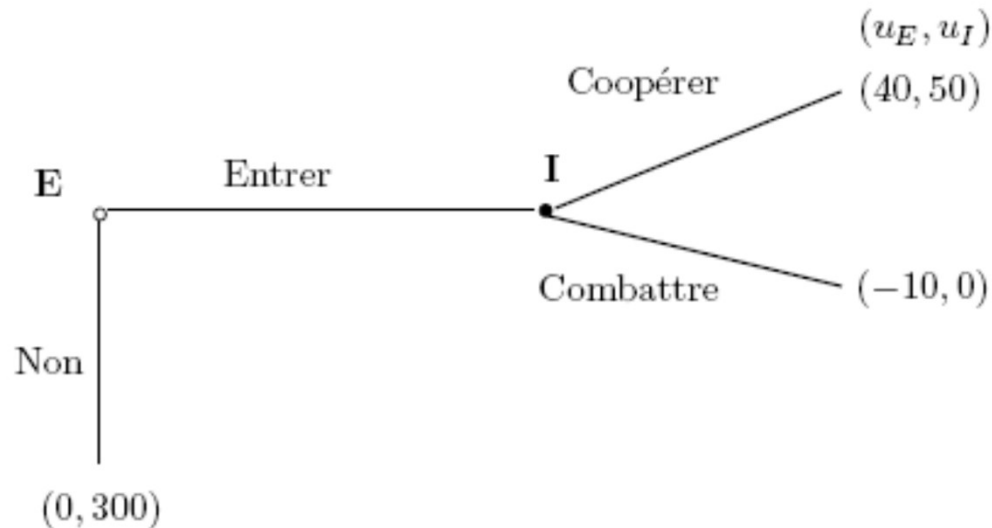
Définition d'un jeu : forme extensive



Exemple entrée potentielle sur un marché



Un entreprise E s'interroge sur la possibilité ou non d'entrer sur un marché monopolistique détenu par l'entreprise I.
Si E entre, I peut soit combattre (guerre des prix) soit coopérer (reformer un monopole ie contrôler les prix).

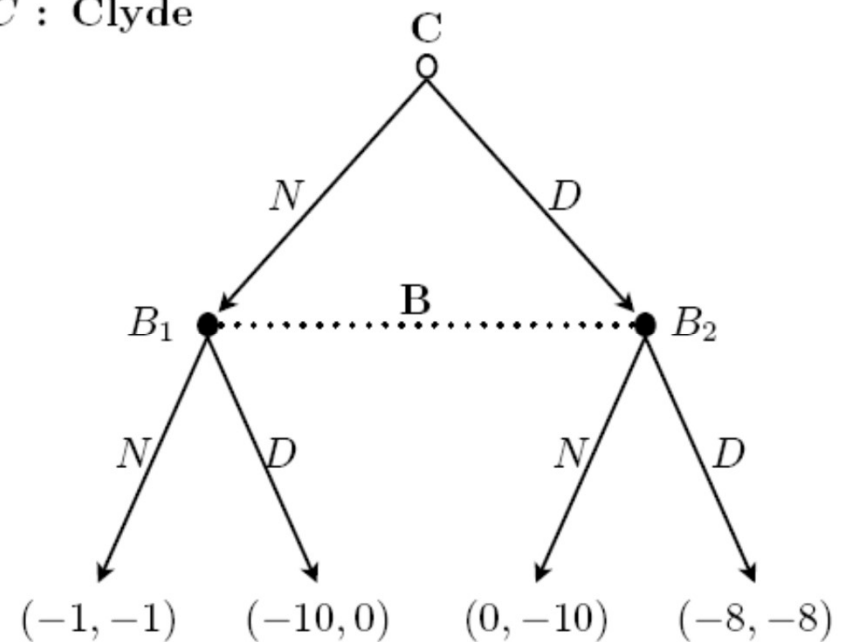
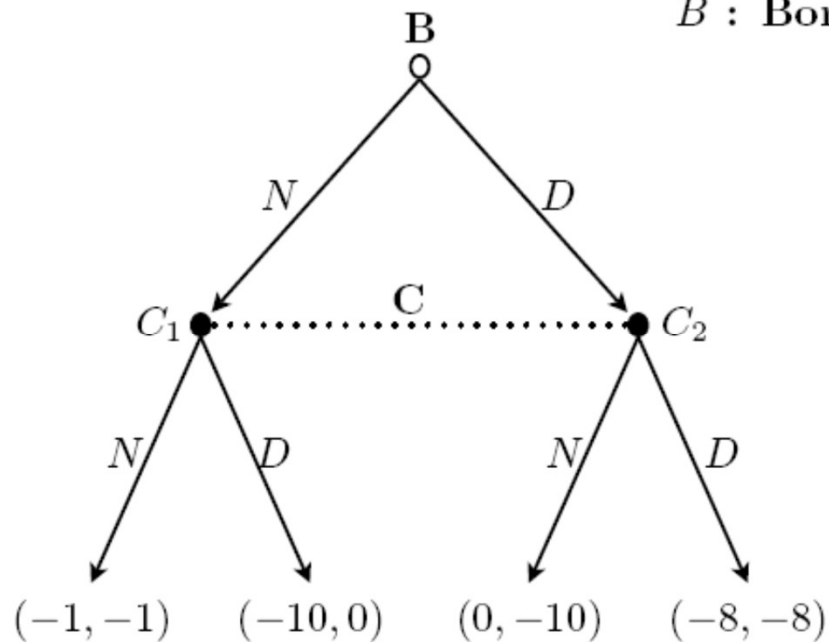


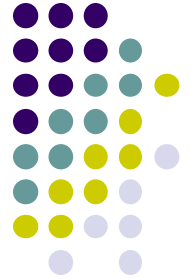
Ensemble d'information



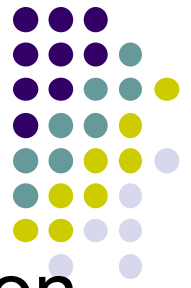
- h_i est la collection des nœuds auquel fait face le joueur à l'étape i .
- Ex: transposition du dilemme du prisonnier en jeu séquentiel => Importance de qui « joue » en 1^{er} ?

B : Bonnie – C : Clyde





SOLUTIONS / NOTIONS D'ÉQUILIBRE



Définition de l'équilibre de Nash

- Dans un jeu non-coopératif, avec information imparfaite ...
- Nash a défini la notion d'équilibre en théorie des jeux comme :
 - Une situation dans laquelle aucun joueur n'a intérêt à jouer différemment si les autres joueurs maintiennent leur décision...
 - Cas $\exists p^* = (p_1^*, \dots, p_n^*)$ ($p_i^* \in P_i, i = 1 \dots n$) tel que

$$u_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq u_i(p_i, p_{-i}^*), \quad \forall p_i \in P_i, \quad \forall i = 1 \dots n.$$

Illustration : le dilemme du prisonnier



Prisonnier 2 (P2)	Dénoncer (D ₂)	Ne Pas Dénoncer (NPD ₂)
Prisonnier 1 (P1)		
Dénoncer (D ₁)	(5, 5)	(0, 10)
Ne Pas Dénoncer (NPD ₁)	(10, 0)	(1, 1)

Equilibre de Nash si une stratégie (décision P1, décision P2) est une sorte de trou gravitationnel d'où on ne peut pas sortir ...

Qu'en est il de ce jeu ?
Testons les différentes stratégies (4 en tout)

=> N'existe pas toujours !!!

Illustration : le dilemme du prisonnier



Prisonnier 2 (P2)	Dénoncer (D ₂)	Ne Pas Dénoncer (NPD ₂)
Prisonnier 1 (P1)		
Dénoncer (D ₁)	(5, 5)	(0, 10)
Ne Pas Dénoncer (NPD ₁)	(10, 0)	(1, 1)

Est-ce que **(10, 0)** c'est-à-dire la stratégie **(NPD₁, D₂)** est un équilibre de Nash ?

Oui si personne a intérêt à changer d'avis...

Alors ?

Illustration : le dilemme du prisonnier



Prisonnier 2 (P2)	Dénoncer	Ne Pas Dénoncer (NPD ₂)
Prisonnier 1 (P1)	(D ₂)	
Dénoncer (D ₁)	(5, 5)	(0, 10)
Ne Pas Dénoncer (NPD ₁)	(10, 0)	(1, 1)

Est-ce que $(10, 0)$ c'est-à-dire la stratégie (NPD_1, D_2) est un équilibre de Nash ?

Oui si personne a intérêt à changer d'avis...

Sauf que si P1 passe de NPD_1 à D_1 il passe de 10 ans de prison à 5 ans (donc c'est mieux)...

⇒ Si P2 ne change pas de décision P1 a intérêt lui à le faire

⇒ Nyet

Illustration : le dilemme du prisonnier



Prisonnier 1 (P1)	Prisonnier 2 (P2)	
	Dénoncer (D ₂)	Ne Pas Dénoncer (NPD ₂)
Dénoncer (D ₁)	(5, 5)	(0 , 10)
Ne Pas Dénoncer (NPD ₁)	(10 , 0)	(1, 1)

Est-ce que (1, 1) c'est-à-dire la stratégie (NPD₁, NPD₂) est un équilibre de Nash ?

Oui si personne a intérêt à changer d'avis...

Sauf que si P1 passe de NPD₁ à D₁ il passe de 1 an de prison à 0 (donc c'est mieux)...

⇒ Si P2 ne change pas de décision P1 a intérêt lui à le faire

⇒ Nyet

Illustration : le dilemme du prisonnier



Prisonnier 2 (P2)	Dénoncer (D ₂)	Ne Pas Dénoncer (NPD ₂)
Prisonnier 1 (P1)		
Dénoncer (D ₁)	(5, 5)	(0, 10)
Ne Pas Dénoncer (NPD ₁)	(10, 0)	(1, 1)

Est-ce que (0, 10) c'est-à-dire la stratégie (D₁, NPD₂) est un équilibre de Nash ?

Oui si personne a intérêt à changer d'avis...

Sauf que si P2 passe de NPD₂ à D₂ il passe de 10 ans de prison à 5 (donc c'est mieux)...

⇒ Si P1 ne change pas de décision P2 a intérêt lui à le faire

⇒ Nyet

Illustration : le dilemme du prisonnier



Prisonnier 1 (P1)	Prisonnier 2 (P2)	
	Dénoncer (D ₂)	Ne Pas Dénoncer (NPD ₂)
Dénoncer (D ₁)	(5, 5)	(0, 10)
Ne Pas Dénoncer (NPD ₁)	(10, 0)	(1, 1)

Est-ce que (5, 5) c'est-à-dire la stratégie (D₁, D₂) est un équilibre de Nash ?

A priori oui ☺ => Check passage
D₁ -> NPD₁ (évolution gain P1 et
D₂ -> NPD₂ (évolution gain P2)

Illustration : le dilemme du prisonnier



Prisonnier 2 (P2)	Dénoncer	Ne Pas Dénoncer
Prisonnier 1 (P1)		
Dénoncer	(5, 5)	(0, 10)
Ne Pas Dénoncer	(10, 0)	(1, 1)

En résumé :

(0,10) n'est pas un équilibre de Nash car si P1 dénonce P2, P2 a intérêt à dénoncer P1 (ie prends 5 ans au lieu de 10)

Donc $U_2(D, \neg D) < U_2(D, D)$
Même raisonnement pour (10,0) pour P1.

(1,1) n'est pas un équilibre de Nash car si P1 ne dénonce pas P2, P2 peut être libéré s'il dénonce P1 (idem pour P1)

Donc $U_1(\neg D, \neg D) < U_1(D, \neg D)$

Par contre si P1 dénonce P2, P2 n'a pas intérêt à ne pas dénoncer P1 (et réciproquement)

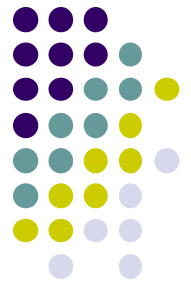
=> **N'existe pas toujours !!!**

Exercice: hypothèse compétences complémentaire



- Traduction en forme normale :
- Équilibre de Nash ?

		Lui	
		Stage 1	Stage 2
Vous	Stage 1	(0, 800)	(800, 500)
	Stage 2	(500, 800)	(500, 0)



Fonction de réponse & domination

- Soit $R_i(p_{-i})$ la fonction de réponse de i qui renvoie la meilleure stratégie pour i en fonction des actions des autres joueurs (s_{-i})
- Soit

$$u_i(R_i(p_{-i}), p_{-i}) \geq u_i(p_i, p_{-i}), \quad \forall p_i \in P_i, p_{-i} \in P_{-i}.$$

- Alors l'(es) intersection(s) des 2 fonctions donnent un équilibre de Nash...
- i.e. ces équilibres optimisent $R_i(p_{-i})$

Revoyons la scène au ralenti



- Fonction de meilleure réponse ! (de qui ?)
- D'abord Prisonnier 1 => meilleure réponse parmi les choix de 1 donc

		Prisonnier 2	
		Dénoncer	Ne Pas Dénoncer
Prisonnier 1	Dénoncer	(5, 5)	(0, 10)
	Ne Pas Dénoncer	(10, 0)	(2, 2)



Revoyons la scène au ralenti

- Fonction de meilleure réponse ! (de qui ?)
- D'abord Prisonnier 1 => meilleure réponse parmi les choix de 1 ...
- **Mais meilleure réponse par rapport à quoi ? Le choix que peut faire P2 (on le fait pour chaque choix) et le gain que P1 obtient en fonction de la décision de P2**

Si 2 dénonce 1
quelle est la
meilleure réponse
de 1 ?
Dénoncer ou
ne pas dénoncer ?

		Prisonnier 2	
		Dénoncer	Ne Pas Dénoncer
Prisonnier 1	Dénoncer	(5 , 5)	(0, 10)
	Ne Pas Dénoncer	(10 , 0)	(2, 2)



Revoyons la scène au ralenti

- Fonction de meilleure réponse ! (de qui ?)
- D'abord Prisonnier 1 => meilleure réponse parmi les choix de 1 ...
- **Mais meilleure réponse par rapport à quoi ? Le choix que peut faire P2 (on le fait chaque choix) et le gain que P1 obtient en fonction de sa décision**

Si 2 dénonce 1
quelle est la
meilleure réponse
de 1 ?
Dénoncer ou
ne pas dénoncer ?
=> **Dénoncer !**

		Prisonnier 2	
		Dénoncer	Ne Pas Dénoncer
Prisonnier 1	Dénoncer	(5 , 5)	(0, 10)
	Ne Pas Dénoncer	(10 , 0)	(2, 2)



Revoyons la scène au ralenti

- Fonction de meilleure réponse ! (de qui ?)
- D'abord Prisonnier **1** => meilleure réponse parmi les choix de 1 ...
- **Mais meilleure réponse par rapport à quoi ? Le choix que peut faire P2 (on le fait pour chaque choix) et le gain que P1 obtient en fonction de sa décision**

SI **2 NE** dénonce **PAS 1**
quelle est la
meilleure réponse
de **1** ?
Dénoncer ou
ne pas dénoncer ?

Prisonnier 2		
Prisonnier 1	Dénoncer	Ne Pas Dénoncer
	Dénoncer	(5 , 5)
	Ne Pas Dénoncer	(10 , 0)

A yellow arrow points down to the 'Ne Pas Dénoncer' column header. A blue double-headed arrow points vertically between the two payoff pairs in the 'Ne Pas Dénoncer' column.



Revoyons la scène au ralenti

- Fonction de meilleure réponse ! (de qui ?)
- D'abord Prisonnier 1 => meilleure réponse parmi les choix de 1 ...
- **Pour rappel : chiffre = années de prison => on cherche à minimiser !**

Si **2 NE** dénonce **PAS 1**
quelle est la
meilleure réponse
de **1** ?
Dénoncer ou
ne pas dénoncer ?
Dénoncer !

Prisonnier 2 Prisonnier 1	Dénoncer	Ne Pas Dénoncer
Dénoncer	(5 , 5) 	(0 , 10)
Ne Pas Dénoncer	(10 , 0)	(2 , 2)

Revoyons la scène au ralenti



- Ensuite **Prisonnier 2** => meilleure réponse parmi les choix de 2...
- Pour rappel : chiffre = années de prison => on cherche à minimiser !

Prisonnier 1	Prisonnier 2	
	Dénoncer	Ne Pas Dénoncer
Dénoncer	(5, 5)	(0 , 10)
Ne Pas Dénoncer	(10 , 0)	(2 , 2)

Revoyons la scène au ralenti



- Ensuite **Prisonnier 2** => meilleure réponse parmi les choix de 2 ...
- On regarde les choix de 1 et on choisit les meilleures réponses de 2 correspondantes...

		Prisonnier 2	
		Dénoncer	Ne Pas Dénoncer
Prisonnier 1	Dénoncer	(5 , 5)	(0 ; 10)
	Ne Pas Dénoncer	(10 , 0)	(2 , 2)

Yellow arrows indicate the best response for Prisoner 2: from (5, 5) to (0, 10) and from (10, 0) to (2, 2).

Revoyons la scène au ralenti



- Ensuite **Prisonnier 2** => meilleure réponse parmi les choix de 2 ...
- On regarde les choix de 1 et on choisit les meilleures réponses de 2 correspondantes...



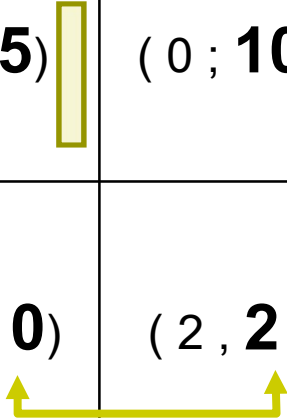
Prisonnier 2	Dénoncer	Ne Pas Dénoncer
Prisonnier 1		
Dénoncer	(5 , 5)	(0 ; 10)
Ne Pas Dénoncer	(10 , 0)	(2 , 2)

Revoyons la scène au ralenti



- Ensuite **Prisonnier 2** => meilleure réponse parmi les choix de 2 ...
- On regarde les choix de 1 et on choisit les meilleures réponses de 2 correspondantes...

		Prisonnier 2	
		Dénoncer	Ne Pas Dénoncer
Prisonnier 1			
Dénoncer		(5 , 5)	(0 ; 10)
Ne Pas Dénoncer		(10 , 0)	(2 , 2)



Revoyons la scène au ralenti



- Ensuite **Prisonnier 2** => meilleure réponse parmi les choix de 2 ...
- On regarde les choix de 1 et on choisit les meilleures réponses de 2 correspondantes...

		Prisonnier 2	
		Dénoncer	Ne Pas Dénoncer
Prisonnier 1			
Dénoncer		(5 , 5)	(0 ; 10)
Ne Pas Dénoncer		(10 , 0)	(2 , 2)





Revoyons la scène au ralenti

- In fine : Equilibre de Nash aux intersections des fonctions de meilleure réponse des 2 joueurs.

Prisonnier 2	Dénoncer	Ne Pas Dénoncer
Prisonnier 1	Dénoncer	(5 , 5)
	(0 ; 10)	
Ne Pas Dénoncer	(10 , 0)	(2 , 2)

=> N'existe pas toujours !!!

Conséquence d'interprétation d'un équilibre de Nash



- Cela revient à proposer l'explication du choix d'un équilibre :
 - Il s'agit d'une situation où chaque joueur :
 - Anticipe l'action des autres joueurs
 - Sélectionne la stratégie la « moins perdante » dans tous les cas ...
 - Solution sous-optimale
- Mais ne constitue pas une fonction de prédiction !!!
- Dont l'existence n'est pas garantie
- Remarque: une autre façon de voir un équilibre de Nash, est comme aucun joueur n'a de raison de changer de décision **unilatéralement**, on parle parfois d'absence de regret.



Retour sur Pareto

- Déjà évoqué dans le cadre de Prométhée
- Relation de Pareto-domination :
 - $\hat{s}$ domine s si :
$$u_i(\hat{s}) \geq u_i(s), \forall i \quad \text{et}$$
$$\exists j, u_j(\hat{s}) > u_j(s).$$
 - Bref, $\hat{s}$ est meilleur que s pour au – 1 joueur ... sans pénaliser les autres...
 - s^* est un optimum de Pareto si aucune autre solution ne la domine
 - 2 solutions ne sont pas Pareto-comparables s'il existe 2 joueurs dont les intérêts sont pénalisés selon le choix de l'une solution ou l'autre... (intérêts divergents)
- Un équilibre de Nash n'est pas forcément un équilibre de Pareto...

Illustration : le dilemme du prisonnier



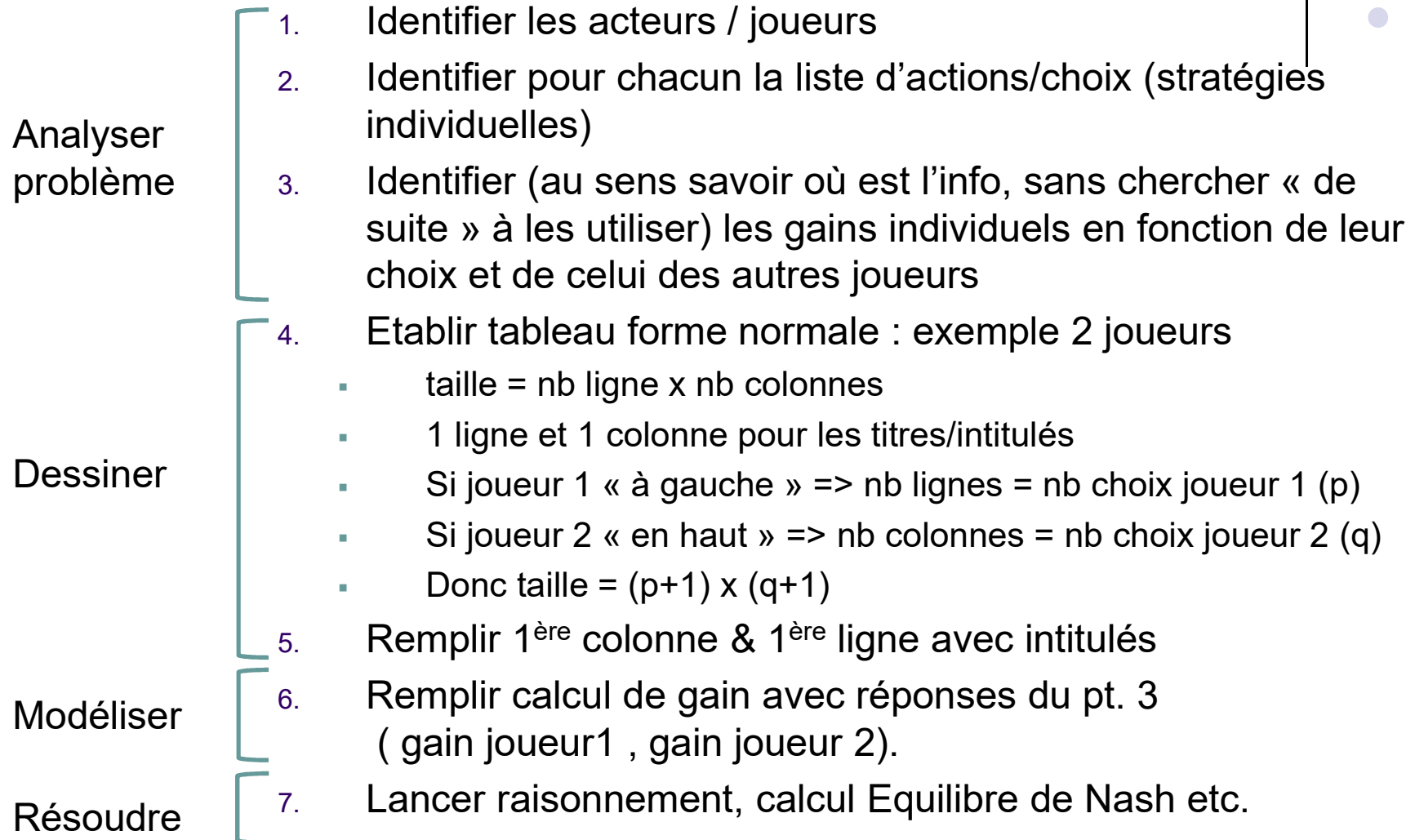
Prisonnier 2		Dénoncer	Ne Pas Dénoncer
Prisonnier 1	Dénoncer	(5, 5)	(0, 10)
	Ne Pas Dénoncer	(10, 0)	(1, 1)

Paradoxe ! La solution dominée est un équilibre de Nash !

Comment expliquer que des joueurs fassent ces choix ?

Aversion au risque : Dénoncer = [0 , 5], Ne pas dénoncer [1 , 10]

Quelle démarche / méthode ...





CHOIX DANS L'INCERTAIN APPLIQUÉS À LA THÉORIE DES JEUX

Définition : notion de stratégies

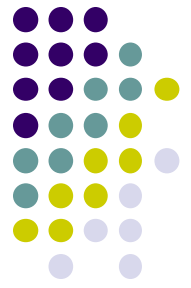


- Stratégie pure
 - Plan d'action qui dit quoi jouer à chaque tour pour un joueur
- Stratégie mixte
 - Ajout d'une dimension aléatoire
 - Chaque action a une probabilité de réalisation
 - => évite des comportements prévisibles

Choix dans l'incertain



- La fonction de conséquence est aléatoire (loterie ie distribution de probabilité ...). Le joueur considère donc :
 - un ensemble d'états $\omega \in \Omega$
 - une mesure de probabilité μ sur Ω ,
 - une fonction $g : A \times \Omega$ et
 - une fonction d'utilité $u : C \rightarrow \mathbb{R}$.
- Choix :
 - une action a qui maximise la valeur espérée de $u(g(a, \omega))$ en fonction de la mesure de probabilité μ .



Quid de Nash en situation Mixte...

- Il s'agit de choisir une stratégie en fonction des gains espérés...
- On calcule l'espérance de gain pour chaque stratégie
- **Exemple** : 2 « ami.e.s » souhaitent passer la soirée ensemble au cinéma, MAIS l'un préfère les films de Science Fiction (SF) et l'autre les Comédies Romantiques (CR).
La forme normale du jeu en stratégie pure est la suivante :
 - Il y a 2 équilibres de Nash, mais cela ne résout pas le problème
 - => stratégie mixte

		Ami2 (SF)	
		SF	CR
Ami1 (CR)	SF	(1, 2)	(-1, -1)
	CR	(-1, -1)	(2, 1)

Quid en situation Mixte... pt de vue 1



- Soient :
 - p la probabilité de l'Ami2 de choisir SF
 - q -----1 ----- CR
- On calcule l'**espérance de gain** de chaque joueurs en fonction de **son** choix de stratégie
- Utilité/Gain de l'ami 1 lorsqu'il choisi SF :
 - $U_{ami1}(SF) = p.1 + (1-p).-1 = 2p - 1$
 - $U_{ami1}(CR) = p.-1 + (1-p).2 = 2 - 3p$

		Ami2 (SF)		CR (1-p)	
Ami1 (CR)		SF (p)		CR (1-p)	
		p		(1-p)	
		x		x	
SF (1-q)		1, 2		-1, -1	
CR (q)		-1, -1		2, 1	

Quid en situation Mixte... pt de vue 1



- Soient :
 - p la probabilité de l'Ami2 de choisir SF
 - q -----1 ----- CR
- On calcule l'espérance de gain de chaque joueurs en fonction de son choix de stratégie
- Utilité/Gain de l'ami 1 lorsqu'il choisi SF :
 - $U_{ami1}(SF) = 2p - 1$
 - $U_{ami1}(CR) = 2 - 3p$
 - **Ami1** choisira SF si **son** gain est meilleur : Donc si $U_{ami1}(SF) > U_{ami1}(CR)$
Càd : $2p - 1 > 2 - 3p \Leftrightarrow p > 3/5$
- Donc la meilleure réponse de **Ami 1** est :
 - SF si $p > 3/5$
 - CR si $p < 3/5$
 - indifférent entre SF ou CR si $p = 3/5$

		Ami2 (SF)		CR (1-p)	
Ami1 (CR)		SF (p)		CR (1-p)	
		SF (p)		CR (1-p)	
SF (1-q)	$U(.) =$	$\times (1, 2)$	$+$	$\times (-1, -1)$	
CR (q)	$U(.) =$	$\times (-1, -1) +$		$\times (2, 1)$	

Quid en situation Mixte... pt de vue 2



- Soient :

- p la probabilité de l'Ami2 de choisir SF
- q -----1 ----- CR

- On calcule l'espérance de gain de chaque joueurs en fonction de son choix de stratégie

- Rappel : Utilité/Gain de l'ami 1

- $U_{ami1}(SF) = 2p - 1$
- $U_{ami1}(CR) = 2 - 3p$
- **Ami1** choisir **SF** si $p > 3/5$ avec p la probabilité que **Ami2** choisisse **SF**

- => **Ami2 :**

- $U_{ami2}(SF) = (1-q).2 + q.-1 = 2 - 3q$
- $U_{ami2}(CR) = (1-q).-1 + q.1 = 2q - 1$

$$U_{ami2}(SF) > U_{ami2}(CR) \Leftrightarrow 2 - 3q > 2q - 1$$

$$\Leftrightarrow q < 3/5$$

- Donc la meilleure réponse de Ami 2 est : SF si $q < 3/5$
CR si $q > 3/5$
indifférent si $q = 3/5$

		Ami2	
		(SF)	(CR)
Ami1	(CR)	SF (p) $U(.) =$	CR (1-p) $U(.) =$
	(SF)	(1-q) 1-q $\times (1, 2)$ $+$	$\times (-1, -1)$ $+$
	(CR)	(q) q $\times (-1, -1)$ $\times$	$\times (2, 1)$ $\times$

Equilibre de Nash en situation mixte



- Résumé des fonctions de meilleure réponse :

- $R_{ami1}(q) \begin{cases} \text{SF si } q < 3/5 \\ \text{CR si } q > 3/5 \\ \text{SF/CR si } q = 3/5 \end{cases}$
- $R_{ami2}(p) \begin{cases} \text{SF si } p > 3/5 \\ \text{CR si } p < 3/5 \\ \text{SF/CR si } p = 3/5 \end{cases}$

Ami1 \ Ami2	SF (p)	CR (1-p)
	SF (1-q)	CR (q)
SF (1-q)	(1, 2)	(-1, -1)
CR (q)	(-1, -1)	(2, 1)

- Pour trouver l'équilibre de Nash... il faudra calculer les fonctions de gains de chaque joueur (qui sera donc fonction des 2 probabilités ...

- Ex : $\text{Gain}(\text{Ami1}) = (1-q) \times \text{Gain}(\text{SF}) + q \times \text{Gain}(\text{CR})$

- Stratégie ? estimer ...

- En fonction du nombre de choix des 5 dernières soirées on peut orienter la décision...
 - ... suppose caractère raisonnable ... volonté de compromis

Stratégie Mixte : illustration

- Stratégie militaire ...

Général 2 Général 1		Attaquer	Battre en retraite
		Attaquer	Battre en retraite
Attaquer		(2, 3)	(8, 0)
Battre en retraite		(6, 6)	(5, 8)



Stratégie Mixte : illustration



- Stratégie militaire ...

Général 2 \ Général 1		Attaquer	Battre en retraite
		$1-q$	q
Attaquer	$1-p$	$(2, 3)$	$(8, 0)$
Battre en retraite	p	$(6, 6)$	$(5, 8)$

-Pas d'équilibre de Nash (pas d'intersection des fonctions de meilleure réponse)

$$U_1(\text{Attaque}) = (1-q).2 + q.8 = 2 + 6.q$$

$$U_1(\text{Retraite}) = (1-q).6 + q.5 = 6 - q$$

$$U_1(\text{Attaque}) > U_1(\text{Retraite})$$

$$\Leftrightarrow 2 + 6.q > 6 - q$$

$$\Leftrightarrow 6.q + q > 6 - 2$$

$$\Leftrightarrow q > 4/7 = 0,57$$

Conclusion : si le général 2 tire à pile ou face le devenir de la bataille, comme $\frac{1}{2} < 4/7$, le général 1 a intérêt à battre en retraite (mais ça se joue à un delta de probabilité de 0,7 ...)



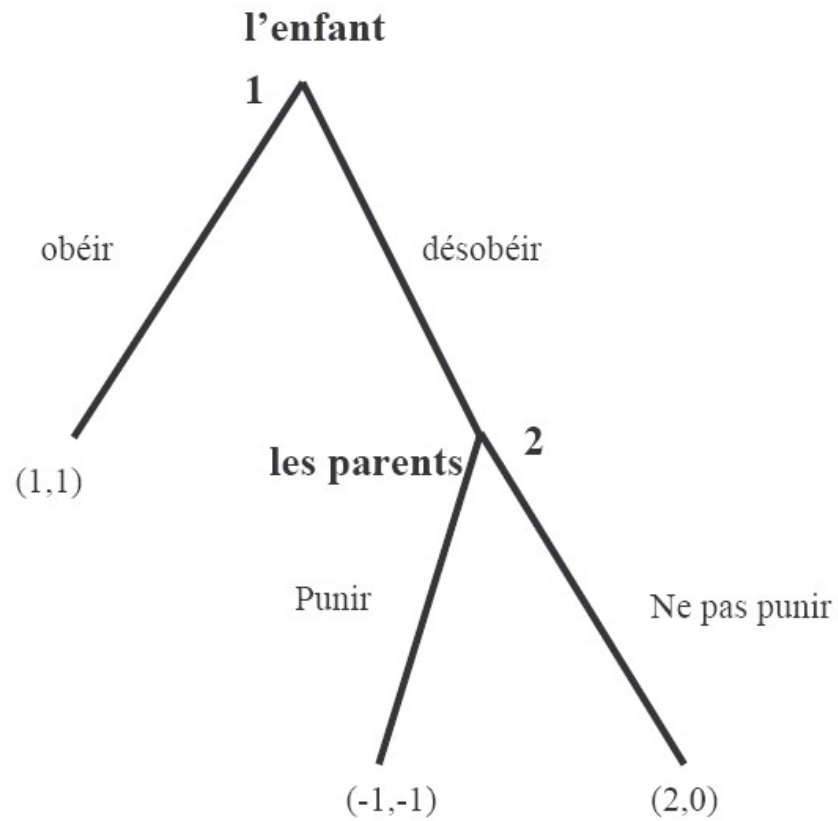
DIVERS RAISONNEMENTS À PARTIR DE LA THÉORIE DES JEUX

Comment trouver un compromis ?

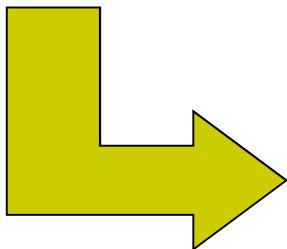
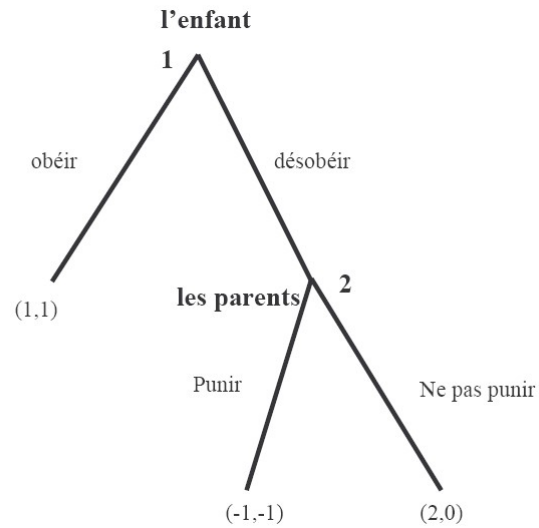


- Communiquer avant le jeu ?
 - Suppose un climat de confiance...
 - Ou de garantie de confiance (menace)
 - => l'accord sera respecté que si c'est l'intérêt des joueurs de le faire
 - Suppose que les menaces sont crédibles...
 - Cad que le joueur est prêt à le faire ...
 - donc qu'il y a intérêt
 - Donc qu'il y gagne ...
 - => vérifier que cela est vrai
- Recourir à un intermédiaire :
 - Tierce personne (fiable, non corruptible)
 - Le hasard !!

Jeu de l'enfant gâté !



Jeu de l'enfant gâté !



Enfant

Parents

	Parents	
	Punir	Ne pas punir
Enfant	Obéir	$1, 1$
	Désobéir	$-1, -1$

Menace crédible

- Une menace est crédible si cette menace est effectivement mis en œuvre lorsque le jeu atteint le nœud ou elle est supposée prendre effet



Bilan sur la théorie des jeux

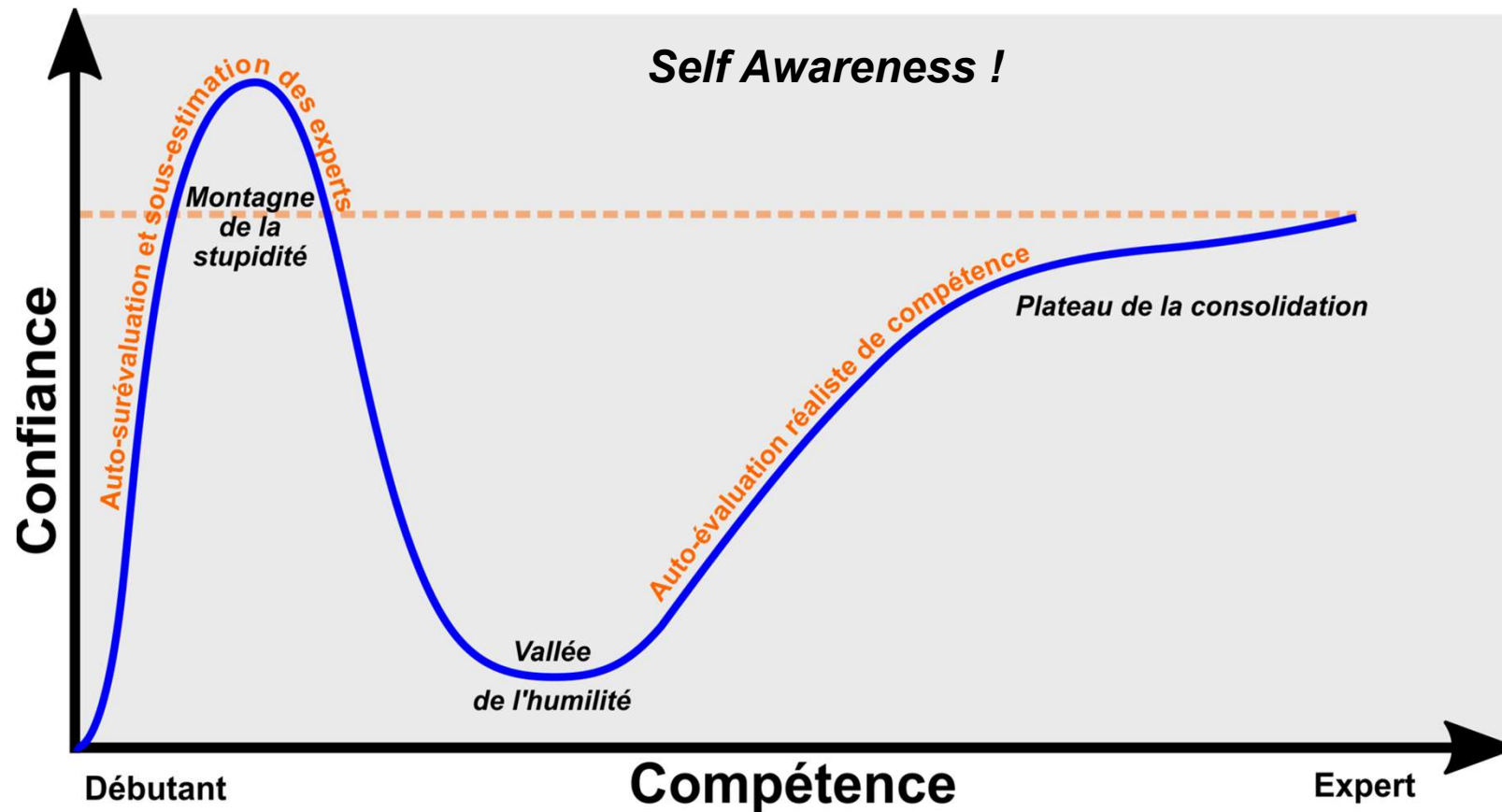


- Approche élégante de reformulation mathématique
- Avantage
 - Formulation mathématique => prouvable
- Inconvénients :
 - Pertinence des formulations mathématiques (ie traduction des hypothèses)
 - Piège mathématique : ie résout davantage les problèmes mathématiques indépendamment de leur pendant réels
 - Hypothèse de rationalité contredite parfois par la réalité !!!
 - Mais surtout, *again*, méthodes basées sur fonction de gains ... un // à faire avec ce qu'on a déjà vu ?

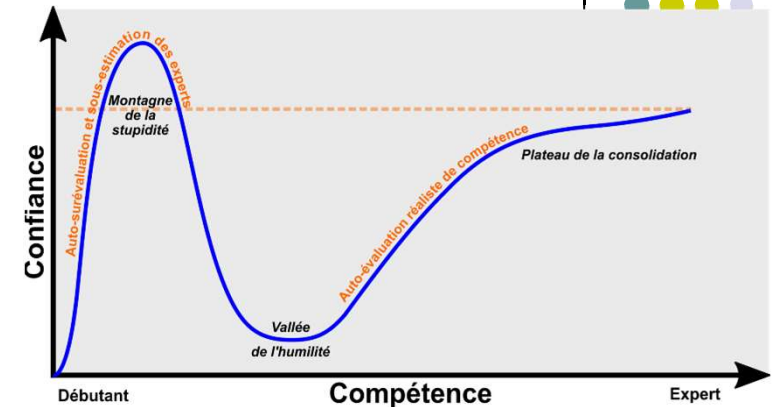


AMUSONS NOUS UN PEU... LIMITE DE L'HYPOTHÈSE DE RATIONALITÉ ...

Effet *Dunning et Kruger*



Effet *Dunning et Kruger*



- En observant une compétence présente en chacun à des degrés divers, ils ont déterminé que :
 1. la personne incompetente tend à surestimer son niveau de compétence ;
 2. la personne incompetente ne parvient pas à reconnaître la compétence de ceux qui la possèdent véritablement ;
 3. la personne incompetente ne parvient pas à se rendre compte de son degré d'incompétence ;
 4. si une formation de ces personnes mène à une amélioration significative de leur compétence, elles pourront alors reconnaître et accepter leurs lacunes antérieures.

[Source Wikipedia & IgNobel 2000]

Domination & Anticipation : Illustration expérimentale



- Validation de l'hypothèse qu'un décideur élimine les solutions dominées... => comportement rationnel confirmé dans la réalité ?
- Cas théorique :

Joueur 2 Joueur 1		Stratégie A	Stratégie B
Stratégie a	(3, 0)	(4, 0)	
Stratégie b	(6, 3)	(0, 2)	

- A domine légèrement B du pt de vue du joueur 2

- Donc le joueur 1 peut supposer que le joueur 2 ne choisira jamais B
=> 1 joue b

Domination & Anticipation : Illustration expérimentale



- Expérience faite par Schotter, Weigelt & Wilson (1993) sur 40 étudiants
- Résultats :
 - Les étudiants jouant le rôle du joueur 1 (resp. 2) choisissent la stratégie a (resp. une stratégie dominée) dans 57% des cas (20% des cas).
 - => étudiants dans le rôle du joueur 1 ne font pas l'hypothèse d'un «opposant» rationnel (ou intelligent)
 - => choisissent la sécurité

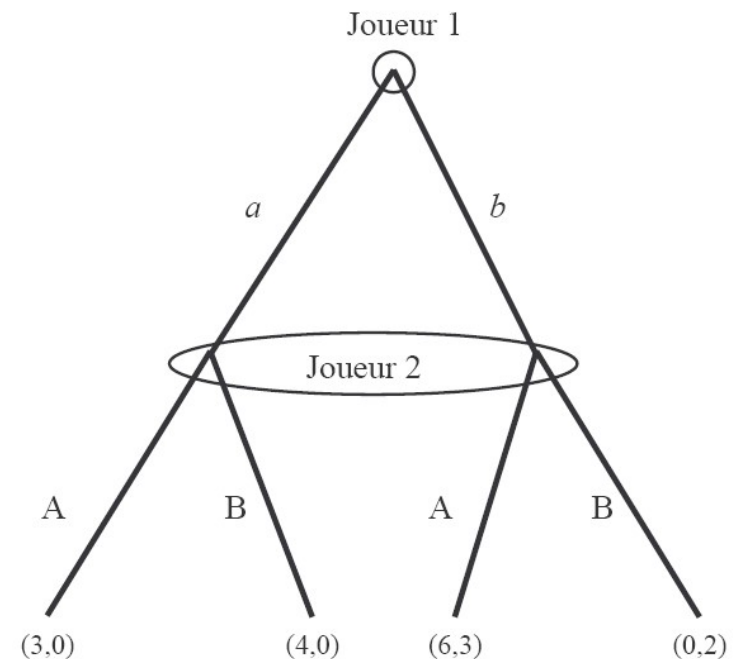
Joueur 1	Joueur 2	
	Stratégie A	Stratégie B
Stratégie a	(3, 0)	(4, 0)
Stratégie b	(6, 3)	(0, 2)

Domination & Anticipation : Illustration expérimentale



- Si présentation extensive => résultats ≠ !
 - 9% des «joueurs 1» choisissent la sécurité a
 - 91% des autres joueurs 1 considère le joueur 2 « rationnels »
- => présentation du jeu (normale ou extensive)
«joue» sur la prise de décision
(pour une même situation)...

Joueur 1	Joueur 2	
	Stratégie A	Stratégie B
Stratégie a	(3, 0)	(4, 0)
Stratégie b	(6, 3)	(0, 2)



Rque : échantillon pas très représentatif

Contradiction de l'hypothèse de rationalité



- Expérience réalisée en Allemagne d'un jeu à 2 personnes
 - Joueur 1 a **C** € à partager avec joueur 2
 - Il garde **a** et donne **C-a** à joueur 2
 - Joueur 2 peut
 - soit accepteur **C-a** (et alors le partage se fait)
 - soit refuser et les 2 joueurs perdent **C**
- En théorie :
 - Joueur 1 devrait allouer **a** le plus **grand** possible (ie **C-a** le + petit possible)
 - car joueur 2 a le choix ensuite d'accepter pas grand-chose ou rien
=> pas grand-chose vaut mieux que rien
 - Expériences montrent le contraire
 - Partagent avec un ratio d'environ 60/40 voire 50/50
 - Lorsque ratio trop faible, joueur 2 pouvait refuser
- Ne respectent pas l'hypothèse de rationalité!!!